8. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование : пер. с англ. / под ред. М. Л. Быховского. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

9. Б*атенков К. А.* Математическое моделирование непрерывных многопараметрических каналов связи в операторной форме // Телекоммуникации. – 2013. – № 10. – С. 2–4.

10. Advanced Digital Communications. Classic EE379 Series Courses / John M. Cioffi [et al.]. – Department of Electrical Engineering, Stanford University. – URL: http://www.stanford.edu/group/cioffi/book/chap4.pdf (дата обращения: 02.10.2013).

K. A. Batenkov, PhD in Engineering, DSc Degree Applicant, Academy of Federal Guard Service of Russian Federation, Orel

Modulation and Demodulation of Four-Position Two-Dimensional Signals in Linear Channel with Additive Noise

Synthesis problem solution of linear modulation and demodulation for linear filter channel with additive noise in accord with minimum average squared error criterion is obtained. Derived decision technical effect estimate for two-dimensional four-position amplitude-modulated signals is carried out. It showed the energy benefit (near 3 dB) relative to the extensively applied modal modulation.

Key words: modulation, demodulation, continuous channel.

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ИНВАРИАНТНОСТЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ФУРЬЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В БАЗИСНОЙ СИСТЕМЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследован эффект неинвариантности скользящего энергетического спектра Фурье в базисе параметрических экспоненциальных функций. Приведены результаты оценивания неинвариантности скользящих энергетических фурье-спектров модельных тональных действительнозначных сигналов.

Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, скользящие спектральные измерения, базис, параметрические дискретные экспоненциальные функции, текущий параметрический фурье-спектр, инвариантность текущего параметрического фурье-спектра.

В практике цифрового спектрального анализа часто приходится сталкиваться с необходимостью решения так называемой задачи выявления скрытых периодичностей [1]. Во многих приложениях цифровой обработки сигналов (ЦОС) решение данной задачи осложняется тем, что исследуемые сигналы имеют энергетический фурье-спектр, изменяющийся во времени [1, 2, 3]. Одним из методов эффективного выявления скрытых периодичностей в таких сигналах является скользящее измерение фурье-спектра (результат такого измерения иногда называют скользящим энергетическим фурье-спектром или текущим энергетическим фурье-спектром) [1, 4, 5].

Цель настоящей работы – исследование инвариантности параметрического текущего энергетического фурье-спектра тональных действительнозначных дискретных сигналов на конечных интервалах.

Измерение энергетического фурье-спектра сигнала на конечном интервале в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций

Пусть на конечном интервале в N отсчетов задан сигнал

$$x(n); \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{1}$$

Для разложения такого рода сигналов в работах [6–13] введены и исследованы базисные системы параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П):

$$def_p(p, l, \theta) = W_N^{(p+\theta)l} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta)l\right], \quad 0 \le \theta < 1; \; p, l = \overline{0, N-1}. \tag{2}$$

В частном случае при $\theta = 0$ мы получим базисную систему дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ):

$$def(k,n) = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}kn\right], \quad k, n = \overline{0, N-1}, \tag{3}$$

разложение по которой известно как дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

Заметим, что при каждом значении параметра θ мы получаем свою, определяемую θ систему базисных функций, разложение по которой определено как параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П) при значении параметра θ. Базисные системы ДЭФ-П при $\theta \ne 0$ мультипликативны по переменной l, что позволяет строить быстрые

Получено 08.11.13

процедуры вычисления ДПФ-П [9, 14]. В [6] показано, что любая базисная система ДЭФ-П при определенном θ задает продолжение исходного сигнала в виде параметрической N-периодической последовательности (при $\theta = 0$ имеем обычную периодичность):

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta\ N\ \mathrm{ent}[n/N]}, \qquad (4)$$

где ent [.] – символ взятия целой части.

Несложно установить, что при $\theta = 0$ имеем обычную периодичность сигнала.

Пара преобразований ДПФ-П в обычной форме задается следующими соотношениями:

$$S_N(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n},$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \qquad (5)$$

$$n,k = \overline{0, N-1}, \quad 0 \le \theta < 1.$$

В базисе ДЭФ-П для сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ можно ввести понятия параметрического энергетического параметрического спектра $G_{N,\theta}(k)$ и параметрического спектра мощности $P_{N,\theta}(k)$:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N\left|S_N(k)\right|^2,$$

$$P_N(k) = \left|S_N(k)\right|^2, \ \Delta f = \frac{1}{N}. \qquad (6)$$

Переход от нормированной Δf к «истинной» $\Delta f_{\text{ист}}$ осуществляется согласно выражению $\Delta f_{\text{ист}} = \Delta f \cdot F_s$, где F_s – частота дискретизации сигнала $x(n)$. Вопросы приложений ДПФ-П рассмотрены в работах [11–19].

Одним из методов осуществления скользящих измерений параметрического фурье-спектра на $(k+\theta)$-й частоте является последовательное вычисление k-го бина ДПФ-П (6) при значении параметра θ в скользящем окне длительностью в N отсчетов при сдвиге окна на r отсчетов вправо по исходному сигналу $x(m)$:

$$S_N^{(r)}(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n+r)\ W_N^{(k+\theta)n}, \qquad (7)$$

где $k = \overline{0, N-1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$

Проведение в реальном времени скользящего измерения методом ДПФ-П согласно выражению (7) требует проведения N комплексных умножений и сложений за время одного такта дискретизации. Очевидно, что при высоких частотах дискретизации практически реализовать такой способ измерения весьма сложно. В работе [10] для борьбы с указанным недостатком предложен алгоритм скользящего однобинового параметрического ДПФ (СДПФ-П), разностное уравнение которого имеет вид

$$S_N^{(p)}(k,\theta) = W_N^{-(k+\theta)} \times$$
$$\times\left[S_N^{(p-1)}(k,\theta) + x(p) - x(p-N)\exp(-j2\pi\theta)\right], \qquad (8)$$

где $p = N, N+1, N+2, \ldots$

Инвариантность текущего энергетического параметрического фурье-спектра дискретных сигналов

Введя символическое обозначение для ДПФ-П и ОДПФ-П параметрической N-периодической последовательности $x_\theta(n)$, $n = \overline{0, N-1}$

$$x_\theta(n) \xleftrightarrow{F-P} S_N(k,\theta), \qquad (9)$$

теорему сдвига для ДПФ-П можно записать в следующем виде [6, 8, 11]:

$$\text{если } x_\theta(n) \xleftrightarrow{F-P} S_N(k,\theta), \text{ то}$$

$$x_\theta(n+m) \xleftrightarrow{F-P} W_N^{-(k+\theta)m}\ S_N(k,\theta). \qquad (10)$$

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность энергетического параметрического фурье-спектра параметрической N-периодической последовательности $x_\theta(n)$.

Рассмотрим скользящее измерение на $(k+\theta)$-й частоте параметрического энергетического фурье-спектра дискретного действительного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1), N, (N+1)\ldots}$ при естественном его продолжении.

Представим разностное уравнение (8) скользящего измерения на $(k+\theta)$-й частоте параметрического фурье-спектра дискретного сигнала $x(n)$ при сдвиге на m отсчетов временного окна длительностью N отсчетов в следующем эквивалентном виде:

$$S_m(k,\theta) = W_N^{-(k+\theta)} S^*_{(m-1)}(k,\theta), \qquad (11)$$

где $W_N^{-(k+\theta)} = \exp\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)\right]$; $m = \overline{1, 2, 3, \ldots}$ – сдвиг временного окна;

$$S^*_{(m-1)}(k,\theta) =$$
$$= \left[S_{(m-1)}(k,\theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)\right].$$

Положим, что итерационный процесс выхода алгоритма СДПФ-П на режим скользящего измерения происходит на нулевом шаге, т. е. тогда, когда выходное значение СДПФ-П равно значению коэффициента ДПФ-П:

$$S_0(k,\theta) = S_{(m-1)}(k,\theta)\ \Big|_{(m-1)=0}. \qquad (12)$$

Тогда значение скользящего энергетического параметрического фурье-спектра на $(k+\theta)$-й частоте на m шаге равно:

$$G_m(k,\theta) = N\cdot\left|S^*_{(m-1)}(k,\theta)\right|^2 = N\cdot\left|S_m(k,\theta)\right|^2. \qquad (13)$$

Непосредственно из определения инвариантности следует, что текущий энергетический параметрический фурье-спектр сигнала $x(n)$ на $(k+\theta)$-й частоте будет инвариантен к временному сдвигу сигнала тогда, когда при любом целом $m \geq 1$

$$G_m(k,\theta) = G_0(k,\theta) = N \cdot \left|S_0(k,\theta)\right|^2 = \text{const}. \qquad (14)$$

Учитывая соотношение (6), представим выражение (13) в следующем виде:

$$G_m(k,\theta) = N \cdot \left|S_m(k,\theta)\right|^2 =$$

$$= N \cdot \left|\left[S_{(m-1)}(k,\theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)\right]\right|^2 =$$

$$= N \cdot \left|S_0(k,\theta)\right|^2 = \text{const}. \qquad (15)$$

Таким образом, инвариантность текущего энергетического параметрического фурье-спектра сигнала $x(n)$ на $(k+\theta)$-й частоте будет иметь место при выполнении равенства

$$\left|S_m(k,\theta)\right| =$$

$$= \left|\left[S_{(m-1)}(k,\theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)\right]\right| =$$

$$= \left|S_0(k,\theta)\right| = \text{const}. \qquad (16)$$

Несложно установить, что это возможно в двух частных случаях:

• входной сигнал $x(n)$ (20) имеет $\delta = 0$ и параметр ДПФ-П $\theta = 0$;

• входной сигнал $x(n)$ является параметрическим N-периодическим $x_0(n)$ (4) при $0 < \delta = \theta < 1$.

В общем же случае текущий энергетический параметрический фурье-спектр сигнала $x(n)$ не инвариантен к временному сдвигу сигнала. Данный эффект ЦОС назовем *эффектом неинвариантности*.

На рис. 1 и 2 приведены поверхности инвариантности (неинвариантности) текущего энергетического параметрического фурье-спектра к сдвигу действительного дискретного гармонического сигнала

$$x(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+\delta)n\right] \qquad (17)$$

при $0 \leq \delta < 1$, $\theta = \delta$, $k = \overline{0, N/2+1}$.

Как известно, стандартный текущий энергетический фурье-спектр сигнала (27) при $\delta = 0$ инвариантен к временному сдвигу сигнала, что и иллюстрирует рис. 1, *а*. Рис. 2, *а* иллюстрирует появление при $\theta = \delta = 1/2$ нового явления, которое не наблюдается в системе ДЭФ, а именно: проявление эффекта инвариантности параметрического текущего энергетического фурье-спектра сигнала.

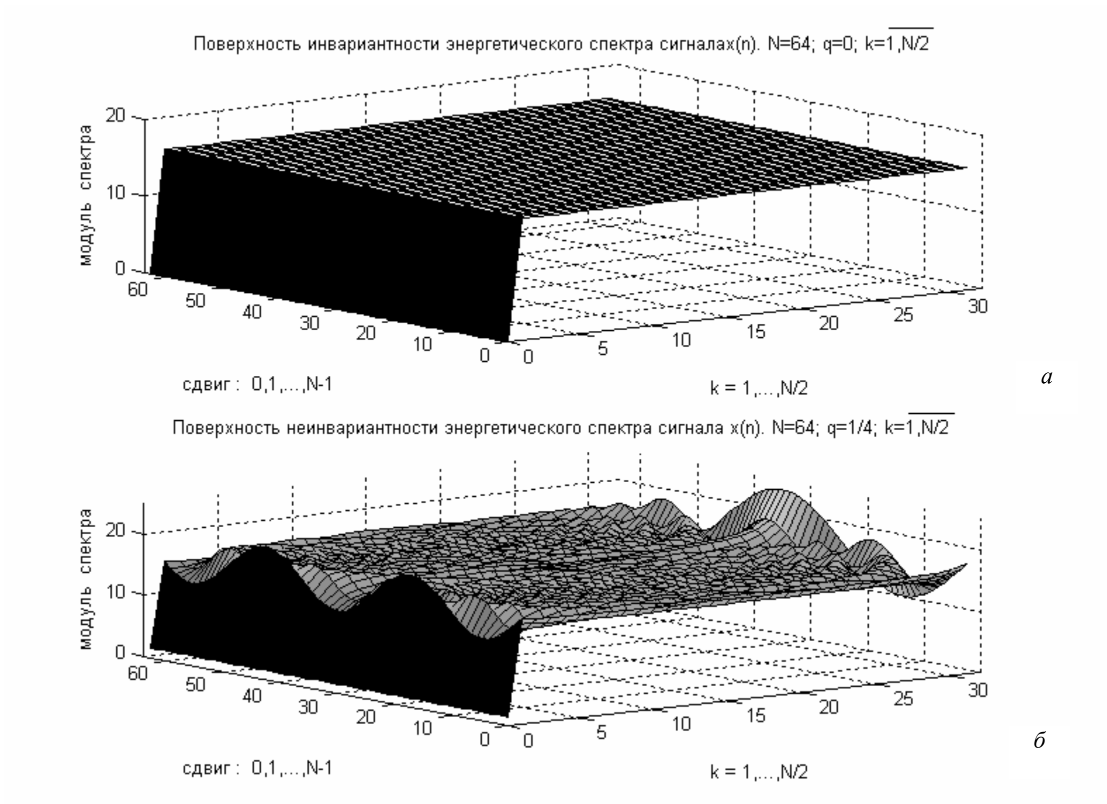

Рис. 1. Поверхность инвариантности (неинвариантности) энергетического спектра сигнала $x(n)$ (20), $\theta = \delta$ в координатах модуль – сдвиг – частота при $\theta = 0$; $\theta = 1/4$

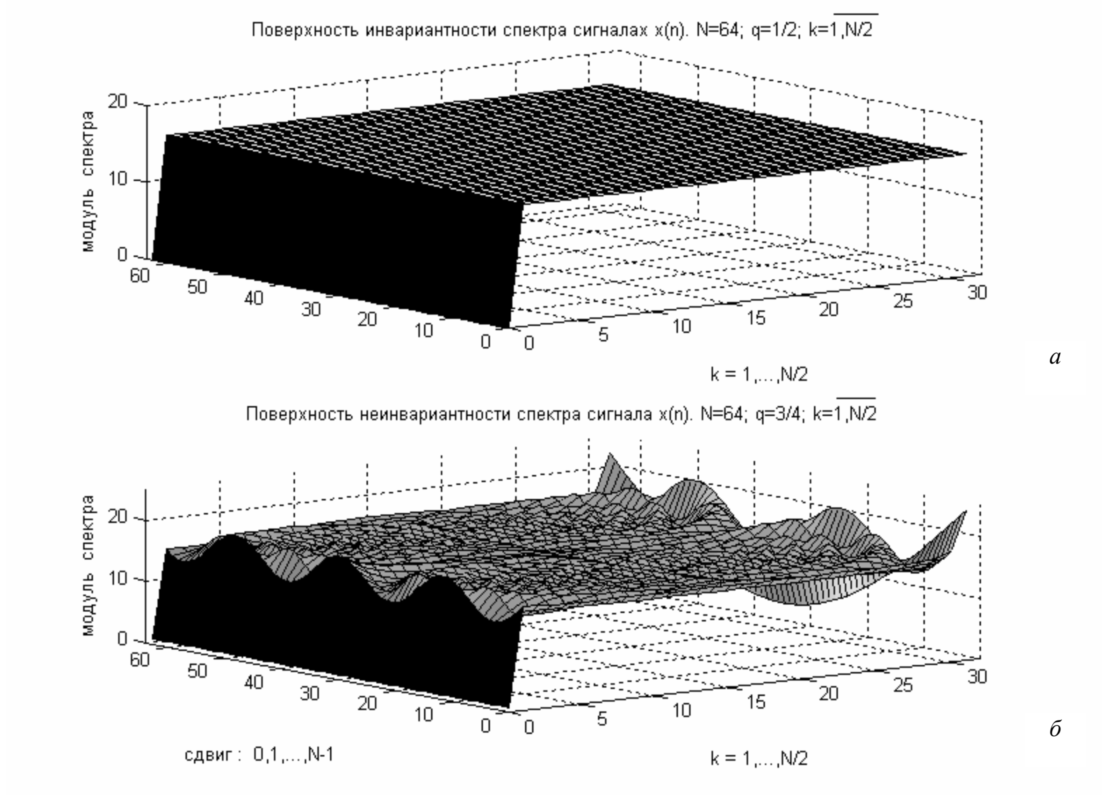

Рис. 2. Поверхность инвариантности (неинвариантности) энергетического спектра сигнала $x(n)$ (20), $\theta = \delta$ в координатах модуль – сдвиг – частота при $\theta = 1/2$; $\theta = 3/4$

Выводы

Исходя из требований практики, в работах [14–20] введено и исследовано параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П). Результаты проведенных в данной работе исследований выявленного автором эффекта неинвариантности скользящего параметрического энергетического спектра действительного сигнала позволяют повысить эффективность применения цифрового спектрального анализа во многих предметных областях, таких как радиолокация, виброакустическая диагностика, пассивная гидролокация, биомедицина и т. д.

Библиографические ссылки

1. *Пономарева О. В.*, *Пономарев В. А.*, *Пономарев А. В.* Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1(176). – С. 2–8.

2. *Пономарева О. В.*, *Пономарев В. А.* Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2(22). – С. 149–157.

3. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье / В. А. Пономарев, О. В. Пономарева, А. В. Пономарев, Н. В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3–11.

4. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.* Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 2. – С. 31–38.

5. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–22.

6. *Пономарева О. В.* Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–12.

7. *Пономарева О. В.* Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 36–42.

8. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.

9. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.

10. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарева Н. В.* Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.

11. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. АН СССР. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.

12. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. СО АН СССР. – 1983. – № 4. – С. 39–45.

13. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия Вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI. – № 9. – С. 67–68.

14. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.

15. *Алексеев В. А.*, *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 91–99.

16. *Пономарева О. В.*, *Алексеев В. А.*, *Пономарев В. А.* Цифровой периодограмм-анализ и проблемы его практического применения // Вестник ИжГТУ. – 2013. – № 2(58).– С. 130–133.

17. *Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.* Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2(16). – С. 122–129.

18. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарев В. А.* Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1. – С. 41–46.

19. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.

20. *Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.* Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2(7). – С. 114–119.

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Invariance of Sliding Energy Fourier Spectrum of Discrete Signals in the Basic System of Parametric Exponential Functions

The effect of non-invariance of sliding energy Fourier spectrum in the basic of parametric exponential function was investigated. The results of estimation of non-invariance sliding energy Fourier spectrum of the model tonal real-valued signals were described.

Key words: discrete signal, final interval, “sliding” spectral measurement, basis, parametric discrete exponential function, current parametric Fourier spectrum, invariance of current parametric Fourier spectrum.

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
В. А. Алексеев, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, Центральная избирательная комиссия Удмуртской Республики

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Исследована широко применяемая в цифровой обработке операция дополнения нулевыми отсчетами исходного сигнал. Предложен метод и алгоритм быстрого апериодического преобразования Фурье, устраняющий избыточность в числе операций и в объеме памяти, обладающий бóльшим быстродействием, чем существующие алгоритмы апериодического преобразования Фурье действительных последовательностей.

Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, операция дополнения нулями, базис, дискретные экспоненциальные функции, параметрическое дискретное преобразование Фурье.

Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов находят самое широкое применение в различных областях научно-прикладных исследований [1–6]. Важное место среди них занимает измерение фурье-спектров (спектральный анализ). В цифровой обработке сигналов при решении целого ряда практических задач (например, при выявлении скрытых периодичностей, обработке изображений) широкое применение нашла операция дополнения нулевыми отсчетами [7–13]. Отметим, что в приложениях спектрального анализа важную роль играет частный случай – ***операция дополнения исходного сигнала длительностью в N отсчетов N нулями***, применяемая, например, для интерполяции отсчетов спектра между N значениями дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и устранения наложения в корреляционной области [5, 7]. Исходя из этого, предлагается ДПФ таких сигналов рассматривать как отдельное преобразование. Назовем данное преобразование апериодическим ДПФ (АДПФ). Представляется, что разработка эффективных методов реализации АДПФ является важной и актуальной задачей.

Получено 21.03.14