13. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия Вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI. – № 9. – С. 67–68.
14. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.
15. *Алексеев В. А.*, *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 91–99.
16. *Пономарева О. В.*, *Алексеев В. А.*, *Пономарев В. А.* Цифровой периодограмм-анализ и проблемы его практического применения // Вестник ИжГТУ. – 2013. – № 2(58).– С. 130–133.
17. *Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.* Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2(16). – С. 122–129.
18. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарев В. А.* Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1. – С. 41–46.
19. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.
20. *Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.* Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2(7). – С. 114–119.

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Invariance of Sliding Energy Fourier Spectrum of Discrete Signals in the Basic System of Parametric Exponential Functions

The effect of non-invariance of sliding energy Fourier spectrum in the basic of parametric exponential function was investigated. The results of estimation of non-invariance sliding energy Fourier spectrum of the model tonal real-valued signals were described.

Key words: discrete signal, final interval, “sliding” spectral measurement, basis, parametric discrete exponential function, current parametric Fourier spectrum, invariance of current parametric Fourier spectrum.

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
В. А. Алексеев, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, Центральная избирательная комиссия Удмуртской Республики

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Исследована широко применяемая в цифровой обработке операция дополнения нулевыми отсчетами исходного сигнал. Предложен метод и алгоритм быстрого апериодического преобразования Фурье, устраняющий избыточность в числе операций и в объеме памяти, обладающий бóльшим быстродействием, чем существующие алгоритмы апериодического преобразования Фурье действительных последовательностей.

Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, операция дополнения нулями, базис, дискретные экспоненциальные функции, параметрическое дискретное преобразование Фурье.

Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов находят самое широкое применение в различных областях научно-прикладных исследований [1–6]. Важное место среди них занимает измерение фурье-спектров (спектральный анализ). В цифровой обработке сигналов при решении целого ряда практических задач (например, при выявлении скрытых периодичностей, обработке изображений) широкое применение нашла операция дополнения нулевыми отсчетами [7–13]. Отметим, что в приложениях спектрального анализа важную роль играет частный случай – ***операция дополнения исходного сигнала длительностью в N отсчетов N нулями***, применяемая, например, для интерполяции отсчетов спектра между N значениями дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и устранения наложения в корреляционной области [5, 7]. Исходя из этого, предлагается ДПФ таких сигналов рассматривать как отдельное преобразование. Назовем данное преобразование апериодическим ДПФ (АДПФ). Представляется, что разработка эффективных методов реализации АДПФ является важной и актуальной задачей.

Получено 21.03.14

Целью настоящей работы является создание метода измерения фурье-спектра с уменьшенным вдвое шагом дискретизации по частоте и алгоритма быстрого апериодического дискретного преобразования Фурье для действительных сигналов.

Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье

В стандартном АДПФ исходный дискретный сигнал $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$, представленный в виде вектора N-мерного линейного пространства $X_N = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)]^T$, дополняется N нулями:

$$X_M = \Big[x(0), x(1), \ldots x(N-1), \underbrace{0, \ldots, 0}_{N}\Big]^T, \qquad M = 2N.$$

Выполнение ДПФ непосредственно сигнала X_M даже методами быстрого преобразования Фурье (БПФ) является неэффективным методом измерения. Во-первых, N ячеек из требуемых ($2N$) ячеек памяти оказываются избыточными (в них хранятся нулевые отсчеты); во-вторых, в БПФ выполняется большое число избыточных операций (операции с нулевыми отсчетами). Рассмотрим метод, устраняющий указанные недостатки стандартного подхода к вычислению АДПФ.

Вычисление ДПФ вектора X_M равносильно усечению N столбцов матрицы преобразования Фурье F_N, т. е. превращению ее из квадратной в прямоугольную матрицу размером $M \times N$:

$$F_{M\times N} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ . \\ (M-1) \\ k \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_M^{(M-1)} & . & . & W_M^{(M-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\ \end{array},$$

$$W_M = \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}\right). \qquad (1)$$

Применив к множеству строк матрицы $F_{M\times N}$ отношение сравнимости по модулю 2, приходим к двум ДПФ-П при значениях параметра $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$ [8]. Следовательно, для получения тех же результатов, что и при стандартном АДПФ, вместо выполнения БПФ размером $2N$ можно выполнить два БПФ размером N, сократив при этом еще и необходимую память в два раза.

Рассмотрим возможность повышения эффективности измерения спектра методом апериодического дискретного преобразования Фурье за счет того, что входной сигнал является действительной последовательностью.

АДПФ и быстрые алгоритмы его вычисления (АБПФ) предполагают, что входная последовательность $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$ является комплексной. В прикладных же задачах цифровой обработки сигналов в большинстве случаев имеют дело с действительными последовательностями: $\mathrm{Im}\{x(n)\}=0$, $n=\overline{0,N-1}$. Спектры этих сигналов в зависимости от выбранной базисной системы обладают различными видами комплексно-сопряженной симметрии, использование которых позволяет проводить измерения спектра методом АДПФ, существенно сократив избыточность в числе операций и объеме памяти [14–20]. Для построения метода быстрого вычисления АДПФ необходимо выполнение определенных этапов.

Предположим, задан некоторый сигнал $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$, и нам известна сумма спектров этого сигнала:

$$Z_N(k) = S_N(k) + S_N(k, 1/2), \quad k=\overline{0,N-1}.$$

1. Находим $S_N(0)$ и $S_N(N/2)$:

$$S_N(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 0;$$
$$S_N(N/2) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{(n+1)} \cdot x(n). \qquad (2)$$

2. Находим $S_N(0,1/2)$ и $S_N(1)$:

$$S_N(0,1/2) = Z_N(0) - S_N(0);$$
$$S_N(1) = \left[Z(N-1) - S^*(0,1/2)\right]^* = \qquad (3)$$
$$= \left[Z(N-1)^* - S(0,1/2)\right].$$

3. Находим $S_N(1,1/2)$ и $S_N(2)$:

$$S_N(1,1/2) = Z_N(1) - S_N(1);$$
$$S_N(2) = \left[Z(N-2)^* - S(1,1/2)\right]. \qquad (4)$$

4. Выполняем этапы 2 и 3 до тех пор, пока не найдем $S_N(N/2-1, 1/2)$. К этому времени мы получим все значения спектра сигнала $x(n)$ на положительных частотах: $S_N(k,1/2)$, $k=\overline{0,N/2-1}$, и $S_N(2)$, $k=\overline{0,N/2}$.

Рассмотрим быстрый алгоритм вычисления суммы спектров сигнала $x(n)$: $Z_N(k) = S_N(k) + S_N(k,1/2)$, $k=\overline{0,N-1}$. С учетом того, что матрица $F_{N,1/2}$ может быть представлена произведением матриц $F_N \times diag\, L_N$, где $diag\, L_N = diag[l(n)]$ есть диагональная матрица вида $diag[l(n)] = [l(0), l(1), \ldots, l(N-1)]$, где $l(n) = \exp\left(-j\frac{2\pi\cdot\theta}{N}n\right)$, $n=\overline{0,(N-1)}$, получение суммы спектров $Z_N(k)$

можно осуществить с помощью следующего матричного произведения:

$$Z_N = (F_N + F_{N,1/2}) \times X_N =$$
$$= F_N \times (E_N + diag\ L_N) \times X_N = F_N \times Y_{N,\text{мод}}; \qquad (5)$$

где $Y^T_{N,\text{мод}} = (y(0), y(1), \ldots, y(N-1)$,

где $y(n) = x(n) \cdot \left[1 + \exp\left(-j\dfrac{2\pi \cdot \theta}{N} n\right)\right]$, $n = \overline{0,(N-1)}$;

$Z_N = \left[Z_N(0), Z_N(1), \ldots, Z_N(N-1)\right]^T$; E_N – единичная матрица.

Отметим, что сумма спектров $Z_N(k)$ не будет обладать свойством комплексно-сопряженной симметрии. Однако и в этом случае число вычислений при определении АДПФ можно сократить. Докажем это положение.

Найдем четные отсчеты $Z_N(k)$. Согласно (5)

$$Z_N(2k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{2nk} =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} y(n) W_{N/2}^{nk} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} y(n+N/2) W_{N/2}^{nk}.$$

Последнее соотношение получено с учетом того, что $W_N^{2(N/2)k} = 1$.

И окончательно:

$$Z_N(2k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2}\left[y(n) + y(n+N/2)\right] W_{N/2}^{nk}, \qquad (6)$$
$$k = \overline{0, N/2-1}.$$

Аналогично найдем и нечетные отсчеты $Z_N(k)$:

$$Z_N(2k+1) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{n(2k+1)} =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} y(n) W_{N/2}^{n(k+1/2)} - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} y(n+N/2) W_{N/2}{}^{n(k+1/2)}.$$

Последнее выражение получено с учетом того, что $W_N^{(N/2)\cdot(2k+1)} = -1$.

И окончательно:

$$Z_N(2k+1) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[y(n) - y(n+N/2)\right] W_{N/2}^{n(k+1/2)}, \qquad (7)$$
$$k = \overline{0, N/2-1}.$$

Несложно видеть, что выражение (6) представляет собой ДПФ комплексной последовательности $\left[y(n) + y(n+N/2)\right]$, а выражение (7) представляет собой ДПФ-П комплексной последовательности $\left[y(n) - y(n+N/2)\right]$ при значении параметра $\theta = 1/2$.

Таким образом, доказано, что при формировании двух дополнительных комплексных последовательностей: $\left[y(n) + y(n+N/2)\right]$ и $\left[y(n) - y(n+N/2)\right]$ мы имеем возможность получить АДПФ не путем выполнения одного БПФ размерности *N*, а путем выполнения БПФ и БПФ-П размерности $N/2$, сократив число необходимых вычислений.

Оценим эффективность предлагаемого алгоритма быстрого вычисления АДПФ действительных последовательностей. В качестве критерия эффективности выберем относительную экономию вычислений (в процентах) при применении сравниваемых алгоритмов [3]:

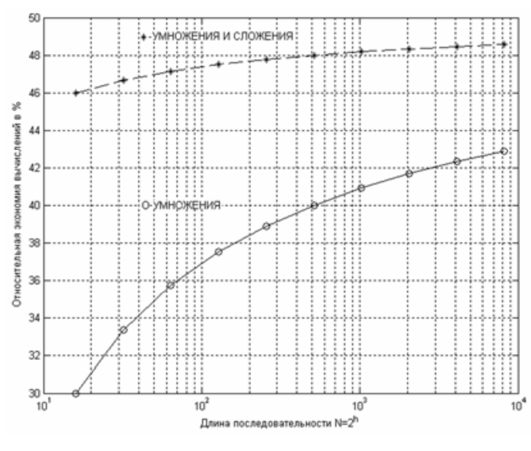
$$\gamma(N) = \big(\big(\text{число операций в алгоритме } A -$$
$$- \text{число операций в алгоритме } B\big)\big/$$
$$\big/ \text{ число операций в алгоритме } A\big) \cdot 100, \qquad (8)$$

где *A* – базовый алгоритм; *B* – предлагаемый алгоритм.

Если обозначить алгоритм стандартного АБПФ как алгоритм *A*, а предлагаемый алгоритм АБПФ как алгоритм *B*, то при расчете относительной экономии по числу умножений и при расчете относительной экономии по числу умножений и сложений формула (8) принимает, соответственно, вид:

$$\gamma_{\text{умн}}\left(2^h\right) = \left[\frac{(h-1)}{2\cdot(h+1)}\right]\cdot 100;$$
$$\gamma_{\text{умн+слож}}\left(2^h\right) = \left[\frac{h+0,6}{2\cdot(h+1)}\right]\cdot 100. \qquad (9)$$

На рисунке показана относительная экономия вычислений в предложенном алгоритме АБПФ в сравнении со стандартным АБПФ. Отметим, что разработанный алгоритм АБПФ для комплексных сигналов позволяет сократить необходимый объем памяти по сравнению со стандартным апериодическим БПФ в четыре раза.



Относительная экономия вычислений в разработанном алгоритме АБПФ в сравнении со стандартным АБПФ

Заключение

Проведенные исследования апериодического дискретного преобразования Фурье как отдельного преобразования позволили разработать метод и алгоритм измерения фурье-спектра действительных сигналов, который обладает рядом преимуществ по сравнению со стандартным подходом. Предлагаемый алгоритм устраняет избыточность в числе операций и в объеме памяти, обладает большим быстродействием, чем существующие алгоритмы АДПФ и позволяет распараллелить процесс измерения фурье-спектра действительных сигналов.

Библиографические ссылки

1. *Пономарева О. В.*, *Пономарев В. А.*, *Пономарев А. В.* Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1(176). – С. 2–8.
2. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье / В. А. Пономарев, О. В. Пономарева, А. В. Пономарев, Н. В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3–11.
3. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–22.
4. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.
5. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI. – № 9. – С. 67–68.
6. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. СО АН СССР. – 1983. – № 4. – С. 39–45.
7. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. АН СССР. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.
8. *Пономарева О. В.* Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.
9. *Пономарева О. В.* Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 36–41.
10. *Алексеев В. А.*, *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 91–99.
11. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.* Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.
12. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарева Н. В.* Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.
13. *Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.* Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2(20). – С. 122–129.
14. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.
15. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.
16. *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.*, *Пономарев В. А.* Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. 2013.- №1 (21).- С. 41-46.
17. *Пономарева О. В.*, *Алексеев В. А.*, *Пономарев А. В.* Цифровой периодограмм-анализ и проблемы его практического применения // Вестник ИжГТУ. – 2013. – № 2(58). – С. 130–133.
18. *Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.* Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2(7). – С. 114–119.
19. *Пономарева О. В.*, *Пономарев В. А.* Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2(22). – С. 149–157.
20. *Пономарев В. А.*, *Пономарева О. В.*, *Пономарев А. В.* Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 2. – С. 31–38.

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
V. A. Alekseev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Central Election Commission of Udmurt Republic

Fast Algorithm for Measuring the Spectrum of Valid Signals by the Method of Aperiodic Discrete Fourier Transform

The operation of padding the initial signal with zero references widely used in digital processing is investigated. We propose the method and algorithm of fast aperiodic discrete Fourier transform. The developed fast algorithm eliminates redundancy in the number of operations and memory capacity and it has higher speed than the existing algorithms of aperiodic Fourier transform for real sequences.

Key words: discrete signal, finite interval, zero padding operation, basis, discrete exponential functions, parametric discrete Fourier transform.