УДК 519.711+681.51

С. Н. Чуканов, доктор технических наук, профессор, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал
И. А. Полонский, аспирант, Сибирская автомобильно-дорожная академия, Омск

ФОРМИРОВАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА УПРАВЛЯЕМОГО ЛАГРАНЖИАНА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ *

Рассмотрен метод управляемого лагранжиана, основанный на формировании потенциальной компоненты лагранжиана для формирования требуемой динамики управляемой системы. Отличительной особенностью работы является учет векторного потенциала при формировании функции Лагранжа.

Ключевые слова: динамика управляемой системы, формирование потенциала лагранжиана, векторный потенциал.

Современные системы управления динамическими объектами содержат контур обратной связи: оценивание вектора состояния системы по информации чувствительных элементов, сравнение его компонент с требуемыми значениями, формирование управляющих корректирующих воздействий на исполнительные органы для реализации требуемых изменений при условии обеспечения устойчивости динамических процессов замкнутой системы [1].

При изменении параметров управляемого динамического объекта (моментов инерции твердого тела, взаимодействия объекта с гравитационным, электромагнитным и другими физическими полями, кинетических моментов роторов маховиков и гироскопических устройств и др.) изменяются компоненты векторного и скалярного потенциалов, входящих в выражение для функций Лагранжа и Гамильтона.

Подход управляемого лагранжиана [2, 3, 4] основан на изменении кинетической и потенциальной компонент для формирования требуемого лагранжиана, определяющего динамику управляемой системы с обратной связью при заданных характеристиках устойчивости. В работе [2] показано, что метод использования функций Лагранжа и метод использования функций Гамильтона являются эквивалентными при описании управляемой динамической системы. Использование метода функций Гамильтона для решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение систем управления динамическими объектами, должно сохранять структуру уравнений Гамильтона при формировании управляющих воздействий [3, 4, 5, 6].

Отличительной особенностью настоящей работы является учет не только скалярного, но и векторного потенциала при формировании функций Лагранжа и Гамильтона системы. Для исследования диссипативных характеристик динамических систем в работе применяется метод декомпозиции структурной матрицы уравнений Гамильтона на симметричную и кососимметричную матрицы [7, 8].

Обобщенная структурная матрица уравнений Гамильтона

Линеаризация уравнений Лагранжа относительно положения равновесия приводит к дифференциальным уравнениям [9, гл. 6]

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{R}\mathbf{q} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

где $\mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n) \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных координат; $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n) \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных скоростей; $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C = \mathbf{C}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричные матрицы; $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – кососимметричные матрицы; $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – нелинейная часть, содержащая $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ со степенью выше первой. В [10] показано, что существует такая матрица $\mathbf{\Lambda}$, для которой выполняется соотношение $\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{M}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}, \mathbf{\Lambda}^T\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}_0 = \operatorname{diag}(c_1 \quad \ldots \quad c_n)$; при этом динамические уравнения принимают вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{S} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C_0} + \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{1}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная матрица; $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{P} = -\mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – кососимметричные матрицы. Для системы с $\mathbf{S} \equiv 0; \mathbf{D} \equiv 0; \mathbf{P} \equiv 0$ можно сформировать лагранжиан $L = {}^1\!/_2\,\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}} - {}^1\!/_2\,\mathbf{q}^T\mathbf{C}_0\mathbf{q}$, и обобщенные импульсы $p_i = {\partial L}/{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i; \mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n) \in \mathbb{R}^n$; соответствующий гамильтониан [11]

$$H = {}^1\!/_2\,\mathbf{p}^T\mathbf{p} + {}^1\!/_2\,\mathbf{q}^T\mathbf{C}_0\mathbf{q}. \tag{2}$$

Система дифференциальных уравнений (1) может быть представлена в форме уравнений Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \times {\partial \mathbf{H}}/{\partial \mathbf{z}}, \tag{3}$$

Получено 29.01.14
* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты 14-07-00272А и 14-08-01132А.

где $\mathbf{z}=(\mathbf{q},\mathbf{p})^T$, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ \mathbf{-I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$; $\mathbf{I}=\operatorname{diag}(1\ \ 1\ \ \ldots\ \ 1)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ – структурная матрица уравнений Гамильтона. Для учета ненулевых $\mathbf{S};\mathbf{D};\mathbf{P}$ сформируем уравнения, аналогичные (3), но со структурной матрицей [7, 8]:

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I}-\mathbf{PC}_0^{-1} & -\mathbf{S}-\mathbf{D}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad (4)$$

причем матрица $\mathbf{J}$ может быть декомпозирована на симметричную матрицу

$$\mathbf{J}_\mathbf{s}=\frac{\mathbf{J}+\mathbf{J}^T}{2}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}+\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right)\\ -0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}+\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right) & -\mathbf{D}\end{pmatrix} \quad (5)$$

и кососимметричную

$$\mathbf{J}_a=\frac{\mathbf{J}-\mathbf{J}^T}{2}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}+0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}-\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right)\\ -\mathbf{I}+0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}-\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right) & -\mathbf{S}\end{pmatrix}. \quad (6)$$

Диссипация в динамической системе обусловлена симметричной матрицей $\mathbf{J}_s$:

$$\dot{H}=\left(\partial H/\partial\mathbf{z}\right)^T\mathbf{J}_s\left(\partial H/\partial\mathbf{z}\right),$$

так как $\left(\partial H/\partial\mathbf{z}\right)^T\mathbf{J}_a\left(\partial H/\partial\mathbf{z}\right)=0.$

При $\mathbf{P}\equiv 0$ получим: $\mathbf{J}_s=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-D}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$; $\mathbf{J}_a=\dfrac{\mathbf{J}-\mathbf{J}^T}{2}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ \mathbf{-I} & \mathbf{-S}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

Построим гамильтониан для системы (1) с учетом $\mathbf{S}$ ($\mathbf{S}\neq 0;\mathbf{D}=0;\mathbf{P}=0$):

$$\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}_0\mathbf{q}=0. \quad (7)$$

Лагранжиан этой системы можно представить в форме [12]

$$L=\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{q}}+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}_0\mathbf{q}, \quad (8)$$

где векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ удовлетворяет уравнению $S_{ij}=\dfrac{\partial A_i}{\partial q^j}-\dfrac{\partial A_j}{\partial q^i}$; в дальнейшем будем рассматривать линейные представления для векторного потенциала $A_i(q)=0,5\sum\limits_{j=1;\,j\neq i}^{n}S_{ij}q_j;\mathbf{A}(\mathbf{q})\in\mathbb{R}^n$, допускающими калибровочные преобразования: $A_i=A_i+\partial\phi(\mathbf{q})/\partial q_i;\phi(\mathbf{q})\in\mathbb{R}$, не изменяющие матрицу $\left[S_{ij}\right]$. С этим лагранжианом получим обобщенные импульсы $p_i=\partial L/\partial\dot{q}_i=\dot{q}_i+A_i$ и гамильтониан

$$H=\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{q}}-L=\tfrac{1}{2}(\mathbf{p}-\mathbf{A})^T(\mathbf{p}-\mathbf{A})+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}_0\mathbf{q}. \quad (9)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial H/\partial\mathbf{q}\\ \partial H/\partial\mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}(\mathbf{p}-\mathbf{A})+\mathbf{C}_0\mathbf{q}\\ \mathbf{p}-\mathbf{A}\end{pmatrix}; \quad (10)$$

с этим гамильтонианом приводят к уравнениям (7).

Рассмотрим динамические уравнения диссипативной гироскопической системы с $\mathbf{S}\neq 0;\mathbf{D}\neq 0;$ $\mathbf{P}=0$ с гамильтонианом (9)

$$\ddot{\mathbf{q}}+(\mathbf{S}+\mathbf{D})\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}_0\mathbf{q}=0;\mathbf{D}=\mathbf{D}^T\in\mathbb{R}^2. \quad (11)$$

Обобщенные уравнение Гамильтона [7, 8] с гамильтонианом (9)

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & -\mathbf{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}(\mathbf{p}-\mathbf{A})+\mathbf{C}_0\mathbf{q}\\ \mathbf{p}-\mathbf{A}\end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{J}_s=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}\end{pmatrix}$; $\mathbf{J}_a=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$.

Для случая учета ненулевых $\mathbf{D}\neq 0$ и $\mathbf{P}\neq 0$ в (1) сформируем уравнения, аналогичные уравнениям Гамильтона (12), но со структурной матрицей [7, 8]: $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I}-\mathbf{PC}_0^{-1} & -\mathbf{D}+\mathbf{PC}_0^{-1}\mathbf{S}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$, причем матрица $\mathbf{J}$ может быть декомпозирована на симметричную матрицу

$$\mathbf{J}_s=\frac{\mathbf{J}+\mathbf{J}^T}{2}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}+\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right)\\ -0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}+\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right) & -\mathbf{D}+0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}\mathbf{S}+\mathbf{S}^T\mathbf{C}_0^{-1}P^T\right)\end{pmatrix},$$

обуславливающую диссипацию в динамической системе, и кососимметричную

$$\mathbf{J}_\mathbf{a}=\frac{\mathbf{J}-\mathbf{J}^T}{\mathbf{2}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}+0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}-\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right)\\ -\mathbf{I}-0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}-\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\right) & 0,5\left(\mathbf{PC}_0^{-1}\mathbf{S}-\mathbf{S}^T\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}^\mathbf{T}\right)\end{pmatrix},$$

не влияющую на диссипацию.

Пример 1. Рассмотрим пример, аналогичный примеру Lagrange top (волчка Лагранжа) из работы [13]. Рассмотрим динамические уравнения гироскопической двухмерной системы: $\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}_0\mathbf{q}=0; \mathbf{C}_0=\operatorname{diag}(c_1 \quad c_2); \mathbf{q}=(x,y)^T$. Лагранжиан системы: $L=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}_0\mathbf{q}+\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}$.

С этим лагранжианом импульсы $\mathbf{p}=\dot{\mathbf{q}}-\mathbf{A}; \mathbf{p}=(p_x,p_y)^T$; с векторным потенциалом $\mathbf{A}=(A_x,A_y)^T=(g\cdot y,-g\cdot x)^T$ получим тензор $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}0 & 2g\\ -2g & 0\end{pmatrix}; S_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial q_j}-\frac{\partial A_j}{\partial q_i}$ и гамильтониан (9).

При конкретных значениях $g=0,5; c_1=c_2=c=10; \mathbf{C}_0=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$ получим векторный потенциал $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0,5y\\ -0,5x\end{pmatrix}$, тензор $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ и гамильтониан $H=\frac{1}{2}(p_x-0,5y)^2+ +\frac{1}{2}(p_y+0,5x)^2+\frac{1}{2}c(x^2+y^2)$. □

Метод формирования обобщенных уравнений Гамильтона построением алгебраических соотношений Ляпунова

Рассмотрим метод формирования обобщенных уравнений Гамильтона методом построения алгебраических соотношений Ляпунова [14]. Пусть заданы нелинейные дифференциальные уравнения для описания динамики гироскопической системы:

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{p}-\mathbf{A}\\ -\mathbf{S}(\mathbf{q})(\mathbf{p}-\mathbf{A})-\mathbf{f}(\mathbf{q})\end{pmatrix}; \qquad (13)$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{q})\in\mathbb{R}^n; \mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n; \mathbf{S}(\mathbf{q})\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

где функция $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ в окрестности положения равновесия может быть представлена как $\mathbf{f}(\mathbf{q})=\partial\mathbf{U}(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q}$; $\mathbf{U}(\mathbf{q})\in\mathbb{R}$; $\mathbf{C}=\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{q}$; $\mathbf{C}=\mathbf{C}^T$; $\mathbf{S}=-\mathbf{S}^T$; для системы (13) может быть сформирован гамильтониан $H(\mathbf{p}\quad\mathbf{q})=\frac{1}{2}(\mathbf{p}-\mathbf{A})^T(\mathbf{p}-\mathbf{A})+U(\mathbf{q})$ с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, удовлетворяющим соотношению $S_{ij}=\partial A_j/\partial q_i-\partial A_i/\partial q_j$, и уравнения динамической системы могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial H/\partial\mathbf{q}\\ \partial H/\partial\mathbf{p}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}(\mathbf{p}-\mathbf{A})+\partial U/\partial\mathbf{q}\\ \mathbf{p}-\mathbf{A}\end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Если ввести вектор состояния $\mathbf{z}=(\mathbf{q}\quad\mathbf{p}-\mathbf{A})^T$, то матрица Гессе гамильтониана при линейном представлении векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ $A_i(\mathbf{q})=0,5\sum_{j=1;j\neq i}^{n}S_{ij}q_j$, при этом $\partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{q}\equiv 0$:

$$\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2=\begin{pmatrix}-\mathbf{S}\,\partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{q}+\partial^2 U/\partial\mathbf{q}^2 & \mathbf{S}\\ -\partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{q} & \mathbf{I}\end{pmatrix}. \qquad (15)$$

В случае нелинейной неконсервативной диссипативной гироскопической системы [14]:

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\mathbf{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{p}-\mathbf{A}\\ (-\mathbf{D}(\mathbf{q})-\mathbf{S}(\mathbf{q}))(\mathbf{p}-\mathbf{A})-\mathbf{f}(\mathbf{q})\end{pmatrix}; \qquad (16)$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{q}),\mathbf{S}(\mathbf{q})\in\mathbb{R}^{n\times n};$$

где вектор силы $\mathbf{f}(\mathbf{q})=\mathbf{f}_c(\mathbf{q})+\mathbf{f}_{nc}(\mathbf{q})$ может быть декомпозирован на консервативную компоненту градиента скалярного потенциала $\mathbf{f}_c(\mathbf{q})=\partial U(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q}$ и неконсервативную компоненту $\mathbf{f}_{nc}(\mathbf{q})=\mathbf{f}(\mathbf{q})-\mathbf{f}_c(\mathbf{q})$. Перепишем уравнения движения в линейном приближении по отношению к первому порядку вектора состояния $\mathbf{z}=(\mathbf{q}\quad\mathbf{p}-\mathbf{A})^T$ [15]:

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{z}=-(\bar{\mathbf{D}}+\mathbf{Q})\,\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2\cdot\mathbf{z}, \qquad (17)$$

откуда

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{C}-\mathbf{P} & -\mathbf{S}-\mathbf{D}\end{pmatrix}=-(\bar{\mathbf{D}}+\mathbf{Q})\,\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2; \qquad (18)$$

$$\mathbf{F}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n};\ \mathbf{P}=-\mathbf{P}^T\in\mathbb{R}^{n\times n}; P_{ij}=\partial f_j/\partial q_i-\partial f_i/\partial q_j;$$
$$\bar{\mathbf{D}}=\bar{\mathbf{D}}^T\in\mathbb{R}^{2n\times 2n};\ \mathbf{Q}=-\mathbf{Q}^T\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}. \qquad (19)$$

Матрица Гессе функции Гамильтона $\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2$ может быть определена из алгебраического уравнения Ляпунова [14]

$$\mathbf{F}\left(\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2\right)^{-1}+\left(\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2\right)^{-1}\mathbf{F}^T=-2\bar{\mathbf{D}}=-2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{pmatrix}, \qquad (20)$$

откуда и из (17) можно найти матрицу Гессе $\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2$:

$$\partial^2 H/\partial\mathbf{z}^2=-(\bar{\mathbf{D}}+\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{F}. \qquad (21)$$

Пример 2. При значении матриц

$$\mathbf{S}=-\mathbf{S}^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\ \mathbf{C}=\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = -\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

получим $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -0{,}1 & -0{,}1 & -1 \\ 0{,}1 & -10 & 1 & -0{,}1 \end{pmatrix}$;

при $\bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ получим матрицу Гессе

$\partial^2 H / \partial \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; кососимметричную

матрицу $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -1{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 & -1{,}1 \\ 1{,}1 & 0 & 0{,}1 & 2{,}1 \\ 0 & 1{,}1 & -2{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. При заданной матрице $\partial^2 H / \partial \mathbf{z}^2$ можно оценить соответствующую функцию Гамильтона:

$$H(z) = 1/2\left[(\dot{x} + y)^2 + (\dot{y} - x)^2 + 10\left(x^2 + y^2\right) \right].$$

В таблице приведена зависимость ненулевых компонент матрицы Гессе от значений $s = S_{12} = -S_{12}$ и $p = P_{12} = -P_{21}$ при $c = C_{12} = C_{21} = 10$, $d = D_{12} = D_{22} = 0{,}1$, то есть влияние значений s и p на структуру динамики системы.

№ п/п	s	p	$H_{z_1 z_1} = H_{z_2 z_2}$	$H_{z_2 z_3} = H_{z_3 z_2} = -H_{z_1 z_4} = -H_{z_4 z_1}$	$H_{z_3 z_3} = H_{z_4 z_4}$
1	0,3	0,1	10,3	1	1
2	0,3	0,3	10,9	3	1
3	0,3	1	13	10	1
4	1	0,1	11	1	1
5	1	0,3	13	3	1
6	1	1	20	10	1
7	3	0,1	13	1	1
8	3	0,3	19	3	1
9	3	1	40	10	1

По результатам таблицы можно сделать следующую оценку элементов матрицы $\partial^2 H / \partial \mathbf{z}^2$:

$$H_{z_1 z_1} = H_{z_2 z_2} = c + ps/d;$$

$$H_{z_2 z_3} = H_{z_3 z_2} = -H_{z_1 z_4} = -H_{z_4 z_1} = p/d;$$

$$H_{z_3 z_3} = H_{z_4 z_4} = 1,$$

или

$$\partial^2 H / \partial z^2 = \begin{pmatrix} c + ps/d & 0 & 0 & -p/d \\ 0 & c + ps/d & p/d & 0 \\ 0 & p/d & 1 & 0 \\ -p/d & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и $H(z) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(c + ps/d\right)\left(x^2 + y^2\right) + p/d\left(y\dot{x} - x\dot{y}\right)$. □

Заключение

В работе рассмотрен метод формирования управляемых функций Лагранжа и Гамильтона. Отличительной особенностью метода является учет векторного потенциала при формировании гамильтониана системы. Для исследования диссипативных характеристик динамических систем в работе применяется метод декомпозиции структурной матрицы уравнений Гамильтона на симметричную и кососимметричную компоненты.

В последующих работах предполагается рассмотреть вопросы, связанные с нарушением симметрии при учете гироскопических ($\mathbf{S} \neq 0$), диссипативных ($\mathbf{D} \neq 0$) и неконсервативных ($\mathbf{P} \neq 0$) сил, действующих на систему.

Библиографические ссылки

1. *Astrom K. J.*, *Murray R. M.* Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. – Princeton University Press, 2008. – 396 p.
2. The equivalence of controlled Lagrangian and controlled Hamiltonian systems for simple mechanical systems / A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, J. E. Marsden, C. A. Woolsey // ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations. – 2003. – Vol 8. – P. 393–422.
3. *Bloch A. M.*, *Leonard N. E.*, *Marsden J. E.* Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: The first matching theorem // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – Vol. 45. – P. 2253–2270.
4. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: potential shaping and tracking / A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, J. E. Marsden // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2001. – Vol. 46. – P. 1556–1571.
5. *Kirillov O. N.*, *Verhulst F.* Sensitivity analysis of dissipative reversible and hamiltonian systems: a survey // Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE2009 (November 13-19, 2009). – 16 p.
6. *Van der Schaft A. J.* Stabilization of hamiltonian systems // Nonlinear analysis. Theory, Methods & Applications. – 1986. – Vol. 10. – No. 10. – P. 1031–1035.
7. *Василенко Д. Н.*, *Смирнов Ю. В.*, *Чуканов С. Н.* Диссипативная гамильтонова реализация для траекторного управления сложной динамической системой // Авиакосмическое приборостроение. – 2004. – № 7. – С. 21–27.
8. *Нартов Б. К.*, *Чуканов С. Н.* Модели траекторного управления. – Омск : Изд-во ОмГУ, 2001. – 100 с.

9. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М. : Наука, 1987. – 309 с.

10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

11. *Голдстейн Г.* Классическая механика. – М. : Наука, 1975. – 416 с.

12. *Baez J.* Lectures on Classical Mechanics. – University of California, 2005. – 76 p.

13. *Krechetnikov R.*, *Marsden J. E.* Dissipation-induced instabilities in finite dimensions // Reviews of modern physics. – April-June 2007.– Vol. 79. – P. 519–553.

14. *Gajic Z.*, *Qureshi M.* Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control. – Academic press, inc., 1995. – 255 p.

15. *Kwon C.*, *Ao P.*, *Thouless D. J.* Structure of stochastic dynamics near fixed points // Proc. Natl. Acad. Sci. USA 102, 2005. – P. 13029–13033.

S. N. Chukanov, DSc in Engineering, Professor, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Omsk Branch

I. A. Polonsky, Post-graduate, Siberian Automobile and Highway Academy, Omsk

Formation of Vector Potential of Controlled Lagrangian of Dynamical System

A method of controlled Lagrangian, based on the formation of the potential component required for the formation of the Lagrangian dynamics of the controlled system is considered in the paper. A distinguishing feature of the paper is the account of the vector potential in the formation of the Lagrangian function.

Key words: dynamics of controlled system, formation of potential of Lagrangian, vector potential.

УДК 004 : 343.8

К. А. Романов, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

М. А. Сполохова, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

С. Б. Пономарев, доктор медицинских наук, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

М. М. Горохов, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ЕДИНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО КАК СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ МЕДИЦИНСКИМИ УЧРЕЖДЕНИЯМИ УГОЛОВНО-ИСПОЛНИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Отражены особенности формирования единого информационного пространства для пенитенциарного здравоохранения. Обозначены основные требования к созданию новой информационной системы управления медицинскими учреждениями.

Ключевые слова: информационные технологии, единое информационное пространство, пенитенциарное здравоохранение.

На сегодняшний день современные информационные технологии позволяют управлять сложными хозяйственными процессами, решать задачи текущего, среднесрочного и перспективного планирования, осуществлять эффективное горизонтальное и вертикальное взаимодействие. Особенно это актуально в здравоохранении.

В настоящий момент к медицинским учреждениям предъявляется огромное количество требований в области профессиональной деятельности, финансов, со стороны общества и пациента (социальных, информационных, сервисных и т. д.) [1]. Практическое решение большинства проблем невозможно без информатизации медицины. Об этом говорится в Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации до 2020 г. [2].

Новые информационные технологии позволяют повысить эффективность управления различными процессами, служат для оптимизации издержек, придают различным процессам гибкость и раскрывают дополнительные возможности для развития. Переход к информационному обществу заставляет совершенно по-новому подходить к решению задач в различных отраслях, в том числе и в уголовно-исполнительной системе [3].

Информационная деятельность медицинских учреждений уголовно-исполнительной системы России предполагает обработку и анализ значительных объемов информации различного рода для решения управленческих и лечебно-диагностических задач. В связи с постоянным совершенствованием медицинской отрасли, увеличением количества научных разработок в ней и повышением требований к оперативности и доступности информации происходит увеличение объемов информационных потоков в медицинском учреждении, усложнение их структуры и, следовательно, усложняется их анализ.

Получено 13.02.14