УДК 681.142

С. Ф. Тюрин, доктор технических наук, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Ю. А. Аляев, кандидат технических наук, доцент, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Пермский филиал)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ШЕННОНА НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Предлагаются простые способы разложения Шеннона для использования на занятиях по математической логике. Таблица истинности переключательной (булевой, логической) функции делится пополам по требуемой переменной, далее получают функции n – 1 переменной и соответствующую формулу.

Приводятся также методические приемы доказательств неклаузального правила резолюции с использованием разложения Шеннона.

Ключевые слова: переключательная функция, разложение Шеннона, резолюция.

При проведении занятий по дискретной математике и математической логике рассматривается тема «Законы логики высказываний, равносильные преобразования», в которой один из вопросов посвящен преобразованию Шеннона [1–4]. Однако, как правило, ограничиваются рассмотрением преобразования Шеннона в аналитическом виде как следствия из формул равносильных преобразований. Наиболее наглядное табличное преобразование Шеннона используется редко.

Предлагается, в том числе в связи с переходом к новой «бакалаврской» парадигме обучения, усилить аспект наглядности преобразования для закрепления соответствующих компетенций. Тем более что преобразование Шеннона может быть использовано в последующих темах и для понимания ключевого метода – метода резолюций, а также других методов доказательств общезначимости.

Выполнение разложения Шеннона по заданной переменной путем деления таблицы истинности пополам

На занятии по формализации высказываний, например, трех переменных получают таблицу истинности. В ряде случаев соответствующая высказыванию переключательная функция может быть задана номером набора, что удобно для формирования большого количества вариантов самостоятельной работы студентов. Так, для функции № 174 функции трех переменных *A*, *B*, *C* таблица истинности имеет следующий вид (табл. 1).

Таблица 1. **Таблица истинности 1**

Переменные			*Dec*	*f(abc)*
A	*B*	*C*		
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	2	1
0	1	1	3	1
1	0	0	4	0
1	0	1	5	1
1	1	0	6	0
1	1	1	7	1

Для получения разложения Шеннона по старшей переменной *A* таблица делится пополам по этой переменной. Тогда получаем разложение

$$f(ABC) = \overline{A}(B \vee C) \vee AC.$$

Получим разложение по переменной *B* (табл. 2).

Таблица 2. **Таблица истинности 2**

Переменные			*f(bac)*
B	*A*	*C*	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Тогда получаем формулу

$$f(BAC) = \overline{B}C \vee B(A \to C).$$

Получим разложение по переменной *C* (табл. 3).

Таблица 3. **Таблица истинности 3**

Переменные			*f(cba)*
C	*B*	*A*	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Тогда получаем формулу $f(CBA) = \overline{C}\overline{B}A \vee C$.

Получим по таблице истинности (табл. 1) дизъюнктивное разложение Шеннона.

В этом случае используем в первой подтаблице для переменной *A* = 0 строку 000 нулевого значения

Получено 05.02.14

функции, а для второй подтаблицы при $A = 1$ строки нулевого значения функции 100, 110:

$$F(ABC) = [A \vee (B \vee C)][\overline{A} \vee (B \vee C)(\overline{B} \vee C)].$$

В СКНФ имеем:

$$F(ABC) = (A \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C),$$

что очевидно, то же самое – после свертки двух последних скобок по дистрибутивности.

Аналогично можно получить дизъюнктивное разложение по остальным переменным. Подобные разложения по заданным вариантам выполняются студентами в часы самостоятельной работы.

Клаузальная резолюция

В логическом программировании [1] применяется так называемый метод резолюций, который заключается в следующем [2–4].

Если имеются два высказывания (два предложения, два дизъюнкта, две клаузы, другими словами, два элемента КНФ) $(A \vee B)$, $(\overline{A} \vee C)$, которые имеют контрарные или инверсные (A, $\overline{A}$) литералы, то следствием из этих посылок является $(B \vee C)$. Проверим это утверждение:

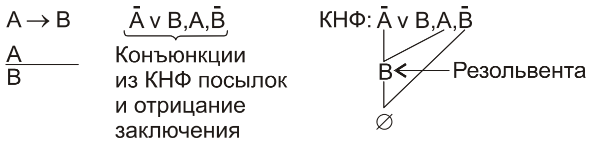
$$(A \vee B) \cdot (\overline{A} \vee C) \rightarrow (B \vee C) = \overline{(A \vee B) \cdot (\overline{A} \vee C)} \vee (B \vee C) =$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \vee A \cdot \overline{C} \vee B \vee C \equiv 1.$$

Такие следствия называются резольвентами (это дизъюнкция членов при контрарных литералах).

Метод основан на получении резольвент. Последовательно получаем резольвенты исходного множества формул, доказательство невыполнимости которого мы ведем до тех пор, пока не получится $\varnothing$ (пустое следствие). Здесь доказательство ведется от противного.

Для применения этого метода необходимо использовать КНФ. Например, для modus ponens [2, 3]:



Получили дерево доказательства. Взяты две посылки и отрицание заключения в КНФ. Следствием посылок $\overline{A} \vee B, A$ является резольвента B, а следствием $B, \overline{B}$ является пустое множество $\varnothing$. Это признак невыполнимости исходного множества членов КНФ. А так как доказательство проводилось от противного, стало быть, мы и доказали следование B из посылок $A \rightarrow B$, A.

Такая резолюция используется в языке ПРОЛОГ. Однако для ее выполнения необходимо получение КНФ.

Доказательство неклаузальной резолюции

В [5] приводится без доказательства так называемое неклаузальное правило резолюции, которое позволяет использовать метод резолюции, не представляя исходное множество формул в КНФ. Неклаузальная резолюция позволяет распространить механизм доказательства путем вывода пустой резольвенты на произвольные логические формулы, даже если гипотезы и отрицание заключения не являются дизъюнктами.

При этом вводится оператор следования $\perp x(F_1 F_2) = F_1^{x=0} \vee F_2^{x=1}$, где символом $F_i^{x=\sigma}$ обозначена формула, полученная заменой всех вхождений x на σ, где $\sigma \in \{0,1\}$, x – одна из переменных, от которых зависят F_1, F_2.

Докажем, что из конъюнкции формул следует $F_1^{x=0} \vee F_2^{x=1}$, используя разложение Шеннона [6].

Тогда требуется доказать, что $\left(xF_1^{x=1} \vee \overline{x}F_1^{x=0}\right)\left(xF_2^{x=1} \vee \overline{x}F_2^{x=0}\right) \rightarrow \left(F_1^{x=0} \vee F_2^{x=1}\right)$, где $(xF_1^{x=1} \vee \overline{x}F_1^{x=0})$ – разложение F_1 по x, а $\left(xF_2^{x=1} \vee \overline{x}F_2^{x=0}\right)$ – разложение F_2 по x.

Общезначимость такой импликации эквивалентна невыполнимости выражения:

$$\left(xF_1^{x=1} \vee \overline{x}F_1^{x=0}\right)\left(xF_2^{x=1} \vee \overline{x}F_2^{x=0}\right)\left(\overline{F_1^{x=0}}\,\overline{F_2^{x=1}}\right).$$

В соответствии с законом противоречия

$$\left(xF_1^{x=1}\right)\left(\overline{x}F_2^{x=0}\right)\left(\overline{F_1^{x=0}}\,\overline{F_2^{x=1}}\right) = 0, \text{ за счет } (x)(\overline{x}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что аналогично $\perp x(F_1 F_2) = F_1^{x=1} \vee F_2^{x=0}$,
поскольку

$$\left(xF_1^{x=1} \vee \overline{x}F_1^{x=0}\right)\left(xF_2^{x=1} \vee \overline{x}F_2^{x=0}\right) \rightarrow \left(F_1^{x=1} \vee F_2^{x=0}\right),$$

то есть $\left(xF_1^{x=1} \vee \overline{x}F_1^{x=0}\right)\left(xF_2^{x=1} \vee \overline{x}F_2^{x=0}\right)\left(\overline{F_1^{x=1}}\,\overline{F_2^{x=0}}\right)$

и $\left(\overline{x}F_1^{x=0}\right)\left(xF_2^{x=1}\right)\left(\overline{F_1^{x=1}}\,\overline{F_2^{x=0}}\right) = 0.$

Таким образом, действительно, как $F_1^{x=0} \vee F_2^{x=1}$, так и $F_1^{x=1} \vee F_2^{x=0}$ являются резольвентами конъюнкции $F_1 F_2$.

Доказательство правила консенсуса

В [5] кроме оператора следования приводится оператор $\nabla x(F_1 F_2) = F_1^{x=0} \wedge F_2^{x=1}$. Этот оператор ∇x в отличие от $\perp x$ используется для доказательства правила консенсуса, двойственного правилу резолюции, используемого для доказательства общезначимости формулы, представленной в общем случае не в ДНФ.

Оказывается, что правило консенсуса (это не что иное, как закон обобщенного склеивания) означает, что дизъюнкция формул $F_1 \vee F_2$ следует из формулы

$$F_1^{x=0} \wedge F_2^{x=1}. \quad (1)$$

Докажем это, используя конъюнктивное разложение Шеннона [2].

Тогда требуется доказать, что

$$\left(x \vee F_1^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_1^{x=1}\right) \vee \left(x \vee F_2^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_2^{x=1}\right)$$

следует из (1), где $\left(x \vee F_1^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_1^{x=1}\right)$ – конъюнктивное разложение F_1 по x, а $\left(x \vee F_2^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_2^{x=1}\right)$ – конъюнктивное разложение F_2 по x.

То есть

$$\left(F_1^{x=0} \wedge F_2^{x=1}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(x \vee F_1^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_1^{x=1}\right) \vee \left(x \vee F_2^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_2^{x=1}\right).$$

Заменим импликацию на дизъюнкцию с отрицанием ее левой части.

Получаем

$$\overline{F}_1^{x=0} \vee \overline{F}_2^{x=1} \vee \left(x \vee F_1^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_1^{x=1}\right) \vee$$
$$\vee \left(x \vee F_2^{x=0}\right)\left(\bar{x} \vee F_2^{x=1}\right). \quad (2)$$

Преобразуем выражение (2), раскрыв скобки:

$$\overline{F}_1^{x=0} \vee \overline{F}_2^{x=1} \vee xF_1^{x=1} \vee \bar{x}F_1^{x=0} \vee$$
$$\vee F_1^{x=0}F_1^{x=1} \vee xF_2^{x=1} \vee \bar{x}F_2^{x=0} \vee F_2^{x=0}F_2^{x=1}. \quad (3)$$

Тогда в соответствии с формулами равносильных преобразований [2] выражение (3) примет вид

$$\overline{F}_1^{x=0} \vee \overline{F}_2^{x=1} \vee xF_1^{x=1} \vee \bar{x}1 \vee 1F_1^{x=1} \vee x1 \vee \bar{x}F_2^{x=0} \vee F_2^{x=0}1,$$

что является тавтологией (общезначимо).

Таким образом, действительно, $F_1 \vee F_2$ является резольвентой $F_1^{x=0} \wedge F_2^{x=1}$.

Докажем, например, с помощью правила консенсуса общезначимость объединения формул, соответствующих закону цепного рассуждения [1, 2, 5]:

$$[(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R),$$

то есть

$$\left(P \wedge \overline{Q}\right), \quad (4)$$

$$\left(Q \wedge \overline{R}\right), \quad (5)$$

$$\overline{P},$$

$$R. \quad (6)$$

Выполним правила консенсуса:

$$\nabla Q(4,5) = P \wedge \overline{R},$$
$$\nabla P(7,6) = (P \wedge 1) \vee 1 = 1. \quad (7)$$

Таким образом, общезначимость доказана методом, двойственным методу резолюций.

Заключение

Доказательство неклаузальной резолюции и правила консенсуса целесообразно включить в лекционный материал. Углубленное рассмотрение разложения Шеннона позволяет подготовить студентов-бакалавров к пониманию этого довольно сложного материала. В свою очередь, доказанные правила, как ожидается, будут использованы в более совершенных версиях языков логического программирования, создание которых давно назрело.

Библиографические ссылки

1. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программиста. – СПб. : Питер, 2001. – 502 с.

2. *Аляев Ю. А.*, *Тюрин С. Ф.* Дискретная математика и математическая логика. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 357 с.

3. *Тюрин С. Ф.*, *Аляев Ю. А.* Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика. – М. : Финансы и статистика, 2010. – 394 с.

4. *Тюрин С. Ф.*, *Ланцов В. М.* Дискретная математика & математическая логика : учеб. пособие. – Пермь : Изд-во ПНИПУ, 2013. – 271 с.

5. Логический подход к искусственному интеллекту / А. Тей, П. Грибомон [и др.]. – М. : Мир, 1990. – 432 с.

6. *Кузнецов О. П.*, *Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 450 с.

S. F. Tyurin, DSc in Engineering, Professor, Perm National Research Polytechnic University
Yu. A. Alyaev, PhD in Engineering, Associate Professor, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Perm branch)

Methodical Peculiarities of the Use of Shannon's Decomposition in the Course of Mathematical Logic

The article proposes simple methods of Shannon's decomposition for the classes of the Mathematical Logic course. The Truth table of the switching (Boolean, logic) function is divided into halves by the required variable, then functions of n-1 variable and corresponding formula are obtained.

The article also proposes methods of proof of non-clausal resolution rule using Shannon's decomposition.

Key words: switching function, Shannon's decomposition, resolution.