УДК 519.71

С. Н. Чуканов, доктор технических наук, профессор, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал

ФОРМИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ*

Рассматривается алгоритм построения потенциалов (скалярного и векторного) по результатам декомпозиции векторного поля динамической системы на потенциальную и соленоидальную компоненты формированием оператора гомотопии для дифференциальной формы, соответствующей векторному полю динамической системы. По построенным потенциалам строятся инварианты, используемые при распознавания образов векторных полей.

Ключевые слова: векторное поле динамической системы, потенциал векторного поля, инвариант векторного поля, декомпозиция векторного поля, оператор гомотопии.

При распознавании образов векторных полей алгоритм определения инвариантов этих векторных полей имеет практическое значение [1, 2, 3]. В работах [4, 5] предложен метод построения инвариантов векторных полей, основанный на декомпозиции Ходжа – Гельмгольца [6] на потенциальное и соленоидальное векторные поля. В работах [7, 8, 9] рассматриваются методы построения инвариантов векторных полей динамических систем на основе формирования оператора гомотопии.

Цель настоящей работы – построение потенциалов (скалярного и векторного) по результатам декомпозиции векторного поля гладкой динамической системы на потенциальную и соленоидальную компоненты формированием оператора гомотопии для дифференциальной формы, соответствующей векторному полю динамической. По построенным потенциалам строятся инварианты, используемые при распознавания образов векторных полей.

Декомпозиция векторного поля динамической системы

Для решения задачи визуализации векторного поля $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial/\partial \mathbf{x}$ динамической системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x});\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n;\ \ \mathbf{f}(0) = 0, \tag{1}$$

декомпозируем $\mathbf{X}$ на потенциальную и векторную компоненты [4, 5]. Для этого сформируем дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, соответствующую векторному полю $\mathbf{X}$. Пусть в евклидовом пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ и метрическим тензором $g_{ij}(\mathbf{x}) = g^{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}$ задано векторное поле $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Для соответствующей 1-формы $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ имеем $\omega_i = \frac{f_i}{\sqrt{g_{ii}}}$, следовательно, $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ [10].

В отличие от методов визуализации, предложенных в работах [4, 5], построим скалярный потенциал из векторного поля $\mathbf{X}$ с применением оператора гомотопии с центром в точке $\mathbf{x}_0 \equiv 0$ для формы $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^1 i_{x_i \partial/\partial x_i} \boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{x}) d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}) \cdot d\lambda \tag{2}$$

и векторный потенциал, соответствующий антиточной дифференциальной форме $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{H} d\boldsymbol{\omega}$.

Построение скалярного потенциала

Оператор гомотопии $\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega})$ удовлетворяет тождеству $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$. Первый член разложения $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$ является точной формой:

$$\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = d\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}) \cdot d\lambda\right), \tag{3}$$

следовательно, является замкнутой формой: $d\boldsymbol{\omega}_e = d(d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})) = 0$. Если считать $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ скалярным потенциалом, то потенциальное векторное поле $\varphi'_x \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ является дуальным форме $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \varphi'_x d\mathbf{x}$.

Из тождества $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ следует, что $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_e$, так как $\mathbb{H}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому точная форма $\boldsymbol{\omega}_e$ инвариантна по отношению к калибровке

$$\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\Omega; \forall \Omega \in \Lambda^2. \tag{4}$$

В соответствии с теоремой Гаусса – Остроградского на компактном (замкнутом) односвязном многообразии $M \in \mathbb{R}^n$:

$$I_e = \int_M (\nabla \cdot \mathbf{X}_e) dV_M = \int_{\partial M} \langle \mathbf{f}_e, \mathbf{n} \rangle dV_{\partial M} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-07-00272а и № 14-08-01132а).

где dV_M – элемент объема многообразия M; $dV_{\partial M}$ – элемент объема границы многообразия ∂M; $\mathbf{n}$ – внешний вектор нормали к границе ∂M; $\mathbf{X}_e$ – векторное поле, соответствующее точной компоненте $\boldsymbol{\omega}_e$. Величина I_e не зависит от выбора антиточной части $\boldsymbol{\omega}_a$, поэтому является инвариантной по отношению к калибровке (4). В качестве многообразия M можно выбрать многообразие, границей которого ∂M, является эквипотенциальная гиперповерхность $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}(x_1,\ldots,x_n) = \text{const}.$

Рассмотрим пример построения абсолютного инварианта методом построения оператора гомотопии для векторного поля нелинейной динамической системы.

Пример 1. Для динамической системы $\dot{x}_1 = x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3; \dot{x}_2 = -x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3$ с векторным полем $\mathbf{X} = \left(x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3\right)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \left(-x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3\right)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ построим форму

$$\boldsymbol{\omega} = \left(x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3\right)dx_1 + \left(-x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3\right)dx_2 = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_e,$$

причем

$$\boldsymbol{\omega}_e = d\left(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\right) = d\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\cdot d\lambda\right) =$$

$$= d\left(\frac{0{,}1x_1^4 + 0{,}1x_2^4}{4}\right) = 0{,}1x_1^3dx_1 + 0{,}1x_2^3dx_2,$$

откуда следует, что скалярный потенциал равен $\varphi(x_1,x_2) = 0{,}025\left(x_1^4 + x_2^4\right)$, и векторное поле, соответствующее точной компоненте,

$$\mathbf{X}_e = 0{,}1\cdot x_1^3\frac{\partial}{\partial x_1} + 0{,}1\cdot x_2^3\frac{\partial}{\partial x_2};\ \nabla\cdot\mathbf{X}_e = 0{,}3\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

При калибровочных преобразованиях $\boldsymbol{\omega}\to\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\boldsymbol{\Omega}$ точная форма не изменяется; например, при $\boldsymbol{\Omega} = 2\cdot dx_1\wedge dx_2$

$$\left(\mathbb{H}\boldsymbol{\Omega}\right)(\mathbf{x}) = \int_0^1 x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{\Omega}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\cdot\lambda^{2-1}d\lambda = x_1dx_2 - x_2dx_1$$

и

$$\boldsymbol{\omega} = \left(x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3\right)dx_1 + \left(-x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3\right)dx \to$$

$$\to \left(x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3\right)dx_1 + \left(-x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3\right)dx_2 + x_1dx_2 - x_2dx_1 =$$

$$= 0{,}1\cdot x_1^3dx_1 + 0{,}1\cdot x_2^3dx_2.$$

Построим многообразие M, ограниченное границей ∂M, которая определяется эквипотенциальной поверхностью $\varphi(x_1,x_2) = 0{,}025\left(x_1^4 + x_2^4\right) = C.$ В соответствии левой частью теоремы Гаусса – Остроградского $I_e = \int_{\partial M}\left\langle \mathbf{f}_e,\mathbf{n}\right\rangle dV_{\partial M}$. Границей является замкнутая кривая $x_1^4 + x_2^4 = 40\cdot C$. Проведем замену координат: $x_1 = r\cos\theta$; $x_2 = r\sin\theta$; откуда $r^4 = \dfrac{40C}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$. В результате декомпозиции точная компонента вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{f}_e(\mathbf{x}) = 0{,}1\begin{pmatrix}x_1^3 & x_2^3\end{pmatrix}^T$; $dV_{\partial M} = rd\theta$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^T$, откуда

$$I_e = \int_0^{2\pi} 0{,}1\left\langle\left(\left(r\cdot\cos\theta\right)^3\ \left(r\cdot\sin\theta\right)^3\right)^T, \left(\cos\theta\ \sin\theta\right)\right\rangle rd\theta =$$

$$= 0{,}1\cdot 40C\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi.$$

□

Построение векторного потенциала

Второй член разложения $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{\omega}_a$ – является антиточной формой (по терминологии [11]):

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - d\left(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\right) = \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}, \qquad (6)$$

причем $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}\left(\mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}\right) = 0.$

Из тождества $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ следует, что $d\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\omega}_a$, так как $dd\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому антиточная форма $\boldsymbol{\omega}_a$ инвариантна по отношению к калибровочному преобразованию:

$$\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + d\sigma; \forall\sigma\in\Lambda^0(x). \qquad (7)$$

Если построить векторное поле $\mathbf{v}^t = \sum_{i=1}^n A_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, где компоненты $A_i = \sqrt{g_{ii}}\cdot\omega_i$, то калибровочное преобразование можно представить в форме

$$A_i \Rightarrow A_i + \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}; \qquad (8)$$

тензор $F_{ij} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$ инвариантен по отношению к калибровочному преобразованию (8), что соответствует инвариантности формы $d\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\omega}_a$ к преобразованию (7).

В случае, когда размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ четная, можно сформировать абсолютный инвариант по отношению к преобразованию (7):

$$I_a = \int_M \left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{n/2} = \int_M \left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{n/2} \in\mathbb{R}, \qquad (9)$$

или, соответственно,

$$\int_M \mathbf{F}^{n/2}dV_M, \qquad (10)$$

который является количественной характеристикой антиточной формы на многообразии $M \in \mathbb{R}^n$. Величина I_a не зависит от выбора точной части $\boldsymbol{\omega}_e$, поэтому является инвариантной по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega}_e$.

В случае, когда размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ нечетная, можно сформировать относительный инвариант по отношению к преобразованию (7):

$$I_a = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{n-1\!/\!2} = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}_a\left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{n-1\!/\!2} \in \mathbb{R}, \qquad (11)$$

или, соответственно,

$$\int\limits_{\partial M} \mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{n-1\!/\!2} dV_{\partial M}, \qquad (12)$$

так как в соответствии с теоремой Стокса

$$\int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1} = \int\limits_{M} d\left[\boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1}\right] = \\ = \int\limits_{M} d\boldsymbol{\omega}_a\left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{k-1} = \int\limits_{M}\left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{k} \qquad (13)$$

получаем абсолютный инвариант в четномерном пространстве.

Пример 2. Рассмотрим динамическую систему: $\dot{x}_1 = x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3; \dot{x}_2 = -x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3$, для которой построим форму $\boldsymbol{\omega} = \left(x_2 + 0{,}1\cdot x_1^3\right)dx_1 + \left(-x_1 + 0{,}1\cdot x_2^3\right)dx_2$; $d\boldsymbol{\omega} = 2dx_1 \wedge dx_2$ на многообразии $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 \le 1\right\}$. Тогда значение абсолютного инварианта

$$I_a = \left|\int\limits_{M}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)\right| = \left|\int\limits_{M}\left(2dx_1 \wedge dx_2\right)\right| = 2\pi.$$

Компоненты векторного потенциала для этой динамической системы соответствуют антиточной форме $\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega} = x_2dx_1 - x_1dx_2$: $\mathbf{A} = \left(x_2 \quad -x_1\right)^T$.

Если форму $\boldsymbol{\omega}_a$ сложить с точной формой

$$\boldsymbol{\omega} = x_2dx_1 - x_1dx_2 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + d\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) = \\ = x_2dx_1 - x_1dx_2 + x_1dx_1 + x_2dx_2,$$

что соответствует ДС:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2,$$

то значение векторного потенциала **A**, тензора **F** и интеграла I_a не изменятся.

Для многообразия M границей является $\partial M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 = 1\right\}$. Для нахождения относительного инварианта проведем замену координат: $x_1 = r\cos\theta; x_2 = r\sin\theta$, причем на границе многообразия $r = 1$: $\partial M = \left\{r, \theta \mid r = 1, \theta \in \left[0\ldots 2\pi\right]\right\}$. Тогда $\boldsymbol{\omega} = rd\theta = d\theta$ и значение относительного инварианта

$$I_a = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1} = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega} = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Основным результатом раздела является алгоритм построения скалярного и векторного потенциалов для векторного поля динамической системы.

Формирование требуемых скалярного и векторного потенциалов системой управления

Для системы управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n};$$

$$\det\left(\mathbf{B}\right) \ne 0, \qquad (14)$$

можно получить требуемый векторный потенциал $\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)$ формированием таких управляющих сигналов **u**, что

$$\boldsymbol{\omega}_a\left(\mathbf{x}\right) = \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbb{H}d\left[\left(\mathbf{f}_i + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\right)_i\right)dx_i\right] = \\ = \mathbb{H}\left[\frac{\partial\left(\mathbf{f}_i + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\right)_i\right)}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_i\right] = \\ = \int\limits_0^1\left[x_j\frac{\partial\left(\mathbf{f}_i\left(\lambda\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\right)_i\right)}{\partial x_j}dx_i\cdot\lambda d\lambda\right];$$

то есть i-компонента вектора $\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)$ должна удовлетворять условию

$$A_i\left(\mathbf{x}\right) = \int\limits_0^1\left[x_j\frac{\partial\left(\mathbf{f}_i\left(\lambda\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\right)_i\right)}{\partial x_j}\lambda d\lambda\right]. \qquad (15)$$

Требуемый скалярный потенциал $\varphi\left(\mathbf{x}\right)$ может быть получен формированием таких управляющих сигналов **u**, что

$$\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \mathbb{H}\left[\left(\mathbf{f}_i + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\right)_i\right)dx_i\right] = \\ = \int\limits_0^1\sum_{i=1}^{N}x_i\left[\mathbf{f}_i\left(\lambda\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\right)_i\right]d\lambda = \\ = \sum_{i=1}^{N}\left(\int\limits_0^1 x_i\left[\mathbf{f}_i\left(\lambda\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\right)_i\right]d\lambda\right). \qquad (16)$$

Пример 3. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u_2$$

с управляющими сигналами u_1, u_2. Сформируем управляющие сигналы $\mathbf{u}$ для получения требуемого скалярного потенциала $\varphi(\mathbf{x}) = -\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\int_0^1 x_i \left[\mathbf{f}_i(\lambda \mathbf{x}) + \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x}) \right)_i \right] d\lambda \right) =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \int_0^1 x_i u_i(\lambda \mathbf{x}) d\lambda = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

откуда следует, что необходимо сформировать вектор управления: $\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2)^T = -2(x_1 \quad x_2)^T$.

Приложение [11]. Метод оператора гомотопии

Обозначим элементы тангенциального векторного пространства в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x}); f_i \in \mathbb{R};$ элементы котангенциального пространства (дифференциальные формы): $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\mathbf{x}) dx_i, \omega_i \in \mathbb{R}$. Для дифференциальных форм можно ввести дифференциальный оператор d со свойствами (*i*) $d\left(\boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\omega}^2\right) = d\boldsymbol{\omega}^1 + d\boldsymbol{\omega}^2$; (*ii*) $d\phi = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i$; (*iii*) $d(d\boldsymbol{\omega}) = 0$ и оператор внутреннего произведения (interior product) $(i_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{p-1}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{p-1})$ для случая $k = \deg(\boldsymbol{\omega}) = 1$: $i_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X})$.

Согласно лемме Пуанкаре, если локальная область $U \in M$ стягивается в точку и форма $\boldsymbol{\omega}$ – замкнутая, то существует такая форма α в U, что $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\alpha}$. Получение формы $\boldsymbol{\alpha}$ по значениям формы $\boldsymbol{\omega}$ может быть основано на построении оператора гомотопии $\mathbb{H} : \Lambda^k \to \Lambda^{k-1}$, действующего на форму $\boldsymbol{\omega}$: $(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}) = \int_0^1 i_{\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}} \boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \lambda^{k-1} d\lambda;\ k = \deg(\boldsymbol{\omega})$.

При $k = 1$; $\mathbf{x}^0 \equiv 0$: $(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}) = \int_0^1 i_{x_i \partial / \partial x_i} \boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{x}) d\lambda$.

Свойства оператора гомотопии: (*i*) $d\mathbb{H} + \mathbb{H}d = \mathbb{I}$; (*ii*) $\left(\mathbb{H}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})\right)(x_i) = 0; (\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})\left(x_i^0\right) = 0$; (*iii*) $i_{x_i \partial / \partial x_i} \mathbb{H} = 0$; (*iv*) $d\mathbb{H}d = d$; $\mathbb{H}d\mathbb{H} = \mathbb{H}$.

Первый член разложения формы $\boldsymbol{\omega} = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$ – точная форма $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})$ является замкнутой: $d\boldsymbol{\omega}_e = 0$; форма $\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$ является антиточной: $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_a = 0$. Для случая $\boldsymbol{\omega} = d\phi$ получим: $(\mathbb{H}d\phi)(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_0)$.

Заключение

Рассмотрен алгоритм формирования потенциалов (скалярного и векторного) по результатам декомпозиции векторного поля динамической системы на потенциальную и соленоидальную компоненты. Для этого построен оператор гомотопии для дифференциальной формы, соответствующей векторному полю динамической системы. По сформированным потенциалам строятся инварианты, используемые при распознавания образов векторных полей.

Библиографические ссылки

1. *Olver P. J.*, *Sapiro G.*, *Tannenbaum A.* Differential invariant signatures and flows in computer vision: A symmetry group approach / B. M.Ter Haar Romeny (Ed.) // Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision. – Dordrecht, Netherlands : Kluwer Acad. Publ., 1994. – P. 255–306.
2. *Чуканов С. Н.* Формирование инвариантов при визуализации векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем // Автометрия. – 2011. – Т. 47. – № 2. – С. 58–63.
3. *Чуканов С. Н.* Преобразование Фурье функции трехмерного изображения, инвариантное к действию групп вращения и переноса // Автометрия. – 2008. – Т. 44. – № 3. – С. 80–87.
4. *Chukanov S. N.* Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2009. – Vol. 19. – No 2. – P. 303–305.
5. Multimedia tools for communicating mathematics / ed. K. Polthier, J. Rodrigues. – Springer-Verlag, 2002. – P. 241–264.
6. *Saffman P. G.* Vortex dynamics. – Cambridge University Press, 1992. – 312 p.
7. *Ульянов Д. В.*, *Чуканов С. Н.* Формирование инвариантов при визуализации векторных полей на основе построения оператора гомотопии // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36. – № 4. – С. 623–627.
8. *Ульянов Д. В.*, *Чуканов С. Н.* Исследование устойчивости системы управления методом декомпозиции векторного поля // Вестник ИжГТУ. – №4(56). – 2012. – С. 127–130
9. *Ульянов Д. В.*, *Чуканов С. Н.* Декомпозиция векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии // Проблемы управления. – 2012. – № 6. – С. 2–6.
10. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М. : Эдиториал УРСС, 2006. – 416 с.
11. *Edelen D. G. B.* Applied Exterior Calculus. – John Wiley&Sons, Inc., 1985. – 472 p.
12. *Wang Y.*, *Lia Ch.*, *Cheng D.* Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 1437–1443.
13. *Cheng D.*, *Shen T.*, *Tarn T. J.* Pseudo-hamiltonian realization and its application // Communications in information and systems. – Dec. 2002. – Vol. 2. – No. 2. – P. 91–120.

S. N. Chukanov, DSc in Engineering, Professor, Russian Academy of Sciences Institution, Siberian Branch, Sobolev Institute of Mathematics, Omsk Department

Formation of Potentials of Vector Fields for Visualization

The algorithm for constructing the scalar and vector potentials based on decomposition of the vector field of the dynamical system on the potential and solenoidal components by forming homotopy operator for the differential form corresponding to the vector field of dynamic system is considered in the paper. The invariants, constructed on these potentials, are used in pattern recognition of vector fields.

Keywords: vector field of dynamical system, potential of vector field, invariant of vector field, decomposition of vector field, homotopy operator.

Получено 28.04.2014

УДК 621.391

В. Б. Гитлин, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ ОСНОВНОГО ТОНА МЕТОДОМ SWIPE ИЗ СИГНАЛА, ПРОШЕДШЕГО ТЕЛЕФОННЫЙ КАНАЛ

Рассмотрена работа алгоритмов SWIPE и SWIPE' при выделении основного тона речевого сигнала, ограниченного полосой телефонного канала. Предложен метод, позволяющий повысить надежность выделения основного тона алгоритмами SWIPE и SWIPE'.

Ключевые слова: основной тон, гармоники, скалярное произведение, пилообразный сигнал.

Алгоритм выделения основного тона речи SWIPE (Sawtooth Inspired Pitch Estimator) [1] продолжает вызывать интерес исследователей, о чем свидетельствуют, в частности, ссылки в литературе на данный алгоритм [2]. Алгоритм SWIPE и его разновидность SWIPE' [1] обеспечивает надежное выделение частоты основного тона (ЧОТ) речи на чистом сигнале и на сигнале с низким соотношением сигнал/шум. Но на сигнале, ограниченном полосой телефонного канала, надежность выделения частоты ОТ резко падает [3].

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [3]. Рассматриваются причины появления больших ошибок выделения частоты ОТ при работе с сигналом, ограниченным полосой телефонного канала. Выполнен анализ качества работы алгоритмов SWIPE и SWIPE' отдельно для мужских и женских голосов. Предложен метод снижения количества больших ошибок методами SWIPE и SWIPE′ при выделении ЧОТ сигнала, ограниченного полосой телефонного канала. Метод использует процедуру выбора частоты ОТ исходя из критерия ближайшего расстояния до предыдущего выбора этой частоты.

В отличие от автокорреляционных методов [4] в алгоритмах SWIPE и SWIPE′ [1] частота ОТ оценивается по максимуму корреляции речевого сигнала с эталонным образцом, имеющим спектр, близкий к спектру анализируемого звука. В алгоритмах SWIPE и SWIPE′ параметры адаптируемого эталонного образца изменяются таким образом, чтобы достичь максимально возможного сходства с анализируемым речевым сигналом. После достижения максимального сходства частота основного тона адаптируемого эталона принимается за частоту основного тона сигнала.

В качестве адаптируемого эталона в алгоритмах SWIPE и SWIPE′ выбран пилообразный сигнал, что и определило название метода (Sawtooth Inspired Pitch Estimator) [1]. Сравнение анализируемого сигнала с эталонным образцом выполняют при помощи интегрального преобразования путем вычисления скалярного произведения между спектром сигнала и ядром преобразования в виде лепестков косинуса [1]. Значение вычисленного скалярного произведения рассматривают как меру интенсивности кандидатов в частоты ОТ в анализируемом звуке. За частоту ОТ анализируемого звука принимают то значение частоты адаптируемого эталона, которой соответствует максимум интенсивности. Одновременно значение вычисленной интенсивности служит мерой вокализированности кадра анализа. Если максимум вычисленной интенсивности на кадре меньше заданного порога, обозначенного как STHR, то анализируемый кадр сигнала считают невокализированным, в противном случае – вокализированным. В алгоритме SWIPE′ в отличие от алгоритма SWIPE в расчете скалярного произведения принимают участие только гармоники с простыми (не кратными) номерами, что дополнительно уменьшает вероятность принятия решения о переходе выделенной частоты ОТ на субгармоники.

Методы SWIPE и SWIPE′ относятся к интегральным [5]. Они определяют значение частоты ОТ на кадре анализа длиной в четыре периода ОТ. Оба метода требуют значительного количества вычислений, предварительного выбора пределов измерения частоты ОТ и установления порога STHR принятия решения ТОН/НЕ ТОН (Т/НТ). Ядро интегрального преобразования алгоритмов SWIPE и SWIPE′ соответствует среднему спектру речевого сигнала примерно 6 дБ/октава в сторону высоких частот [1]. Однако для конкретных произнесений огибающая спектра, присущая конкретному звуку, может отличаться от указанной средней зависимости от частоты. Например, фонема /и/ имеет сильный спад огибающей