МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

А. Н. Дорохов, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный педагогический университет

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК МОНОТОННО КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ С КОНУСОМ

Приведем сначала вспомогательные утверждения.

Определение. Линейное метрическое пространство X называется F-пространством (пространством Фреше), если его метрика, кроме обычных свойств, обладает еще свойствами:

1) $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$ $(x, y \in X)$;

2) из $\alpha_n \to \alpha$ следует: $\rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0$ $(x \in X)$, и из $x_n \to x$ следует: $\rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0$ $(\alpha \in R)$;

3) пространство X полно по метрике.

В дальнейшем число $\|x\|_\rho = \rho(x, 0)$ будем называть ρ-нормой элемента x.

Пусть оператор A действует в F-пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса $K \subset X$ [1, с. 5].

Определение. Оператор A называется монотонным на множестве $M \subset X$, если $\forall x, y \in M$, из $x \le y$ следует $Ax \le Ay$.

Определение. Монотонный на множестве $M \subset X$ оператор A называется монотонно компактным на этом множестве, если для любой монотонной ограниченной по норме последовательности $(x_n) \subset M$ последовательность (Ax_n) компактна [2, с. 145].

Определение. Монотонный на множестве $M \subset X$ оператор A называется h-монотонно компактным на этом множестве, если для любой монотонной ограниченной снизу и сверху последовательности $(x_n) \subset M$ последовательность (Ax_n) компактна.

Теорема Цорна. Если в частично упорядоченном множестве X каждое его подмножество M, являющееся цепью [3, с. 16], имеет верхнюю (нижнюю) границу, то для любого элемента $x_0 \in X$ существует такой максимальный (минимальный) элемент $x \in X$, что $x \ge x_0$ $(x \le x_0)$.

Теорема 1. Пусть

1) в F-пространстве X с конусом $K \subset X$ h-монотонно компактный на конусном отрезке $\langle x_0, \infty\rangle$ оператор A преобразует $\langle x_0, \infty\rangle$ в себя;

2) существуют числа $R > \|x_0\|_\rho$, $q \in (0,1)$ и элемент $u \in X$ такие, что $\|Ax\|_\rho \le q\|x\|_\rho$ $(x \ge x_0,\ \|x\|_\rho > R)$ и $Ax \le u$ $(x \ge x_0,\ \|x\|_\rho \le R)$.

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, \infty\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку x_* с ρ-нормой $\|x_*\|_\rho \le R$.

Доказательство. Обозначим через M множество всех вперед идущих элементов $x \ge x_0$ оператора A. Оно непустое, так как ввиду $A\langle x_0, \infty\rangle \subset \langle x_0, \infty\rangle$ элемент $Ax_0 \in \langle x_0, \infty\rangle$, и значит, $Ax_0 \ge x_0$. Следовательно, $x_0 \in M$ и потому $M \ne \varnothing$.

Введем в M частичный порядок по правилу: $x < y$, если $x, y \in M$ и $x \le y$, $x \ne y$. С этим частичным порядком M становится частично упорядоченным множеством. Покажем, что $AM \subset M$.

Действительно, если $x \in M$, то $Ax \ge x \ge x_0$, поэтому элементы Ax, $x \in \langle x_0, \infty\rangle$. Значит ввиду монотонности оператора A на отрезке $\langle x_0, \infty\rangle$ будет выполняться неравенство $Ax \le A(Ax)$. Следовательно, $Ax \in M$.

Итак, $AM \subset M$.

Теперь докажем, что частично упорядоченное множество M удовлетворяет всем условиям теоремы Цорна.

Возьмем произвольную цепь $P \subset M$. Покажем, что она ограничена сверху в M. Вначале докажем, что она ограничена сверху в X элементом u. Возьмем произвольный $x \in P$. Если $\|x\|_\rho \le R$, то ввиду $x_0 \le x \le Ax$ будет $Ax \le u$, и значит, $x \le u$. Пусть теперь $\|x\|_\rho > R$. Нетрудно видеть, что существует номер $n \in N$ такой, что $\|x\|_\rho, \|Ax\|_\rho, \ldots, \|A^{n-1}x\|_\rho > R$ и $\|A^n x\|_\rho \le R$, так как $q^n\|x\|_\rho \to 0$ и $\|A^n x\|_\rho = \|A(A^{n-1}x)\|_\rho \le q\|A^{n-1}x\|_\rho \le \ldots\ldots \le q^n\|x\|_\rho$.

© Дорохов А. Н., 2015

Так как $A^n x \le u$ и $x_0 \le x \le Ax \le ... \le A^n x$, то $x \le A^n x \le u$.

Итак, множество P ограничено сверху элементом u.

Рассмотрим два случая:

а) цепь AP является конечным множеством;

б) цепь AP является бесконечным множеством.

В случае а) ввиду $x_0 \le x \le Ax$ $(x \in P)$ цепь P ограничена сверху в M наибольшим элементом цепи AP. Пусть теперь цепь AP является бесконечным множеством. Возьмем произвольную последовательность $(y_n) \subset AP$. Очевидно, существует последовательность $(x_n) \subset P$ такая, что $y_n = Ax_n$ $(n \in N)$. Так как последовательность (x_n) является цепью, то из нее можно извлечь монотонную подпоследовательность $(x_{n_k}) \subset (x_n)$. Так как $x_0 \le x_{n_k} \le u$ $(k \in N)$, то в силу h-монотонной компактности оператора A подпоследовательность $(y_{n_k}) = (Ax_{n_k}) \subset (y_n)$ компактна, и значит, из нее, в свою очередь, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Следовательно, множество AP относительно компактно [4, с. 48], значит, в AP существует счетное плотное в P множество $\{y_n\} \subset AP$. Рассмотрим последовательность элементов $(x_n) \subset P$ таких, что $y_n = Ax_n$ $(n \in N)$.

Положим,

$$z_n = x_1 \vee .... \vee x_n,\ w_n = y_1 \vee .... \vee y_n\ (n \in N).$$

Очевидно, каждый из элементов z_n и w_n совпадает, соответственно, с одним из элементов $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$, причем $w_n = Az_n$ $(n \in N)$.

Далее, так как $x_0 \le z_n \le u$ $(n \in N)$ и $z_n \uparrow$, то в силу h-монотонной компактности оператора A последовательность $w_n = Az_n$ компактна и ввиду $w_n \uparrow$ сходится. Пусть $w_n \to w$. Так как $(w_n) = (Az_n) \subset AP \subset AM \subset M \subset \langle x_0, u \rangle$ и $w_n \to w$, то в силу замкнутости отрезка $\langle x_0, u \rangle$ элемент $w \in \langle x_0, u \rangle$.

Покажем, что $y \le w$ $y \in (AP)$.

В самом деле, в силу плотности множества $\{y_n\}$ в AP существует подпоследовательность $(y_{n_k}) \subset (y_n)$, $y_{n_k} \to y$. Так как $y_{n_k} \le w_{n_k} \le w$ $(k \in N)$, то $y \le w$.

Далее, так как $x_0 \le x \le Ax \le w$ $(x \in P)$, то в силу монотонности оператора A на отрезке $\langle x_0, u \rangle$ будет $Ax \le Aw$ $(x \in P)$, и в частности, $w_n \le Aw$ $(n \in N)$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, мы получим, что $w \le Aw$. Отсюда ввиду $w \ge x_0$ следует, что элемент $w \in M$.

Итак, цепь P ограничена сверху в M элементом $w \in M$. Поэтому множество M удовлетворяет всем условиям теоремы Цорна. Поэтому в M существует максимальный элемент x_*.

Очевидно, $x_0 \le x_* \le Ax_*$, поэтому в силу монотонности оператора A на множестве $\langle x_0, \infty \rangle$ будет $Ax_* \le A(Ax_*)$. Значит, $Ax_* \in M$ и $Ax_* \ge x_*$. Но тогда в силу максимальности элемента x_* в M будет $Ax_* = x_*$, где $x_* \ge x_0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть

1) в F-пространстве X с конусом $K \subset X$ h-монотонно компактный на конусном отрезке $\langle x_0, \infty \rangle$ оператор A преобразует $\langle x_0, \infty \rangle$ в себя;

2) существуют числа $R > \|x_0\|_\rho$, $L > 0$ и элемент $u \in X$ такие, что

$$\|Ax\|_\rho \le \begin{cases} L, & x \ge x_0,\ \|x\|_\rho \le R, \\ \|x\|_\rho, & x \ge x_0,\ \|x\|_\rho > R \end{cases}$$

и $Ax \le u$ $(x \ge x_0, \|x\|_\rho \le R_0 = \max\{R, L\})$.

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, \infty \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку x_* с ρ-нормой $\|x_*\|_\rho \le R_0$.

Доказательство. Докажем сначала, что оператор A оставляет инвариантным множество $T = \left\{ x \in X \;\middle|\; x \ge x_0, \|x\|_\rho \le R_0 \right\}$. Действительно, если $x \in T$, то $x \ge x_0$ и $\|x\|_\rho \le R_0$. Поэтому ввиду $A\langle x_0, \infty \rangle \subset \langle x_0, \infty \rangle$ элемент $Ax_0 \in \langle x_0, \infty \rangle$, и значит, $Ax_0 \ge x_0$. Но тогда в силу монотонности оператора A на отрезке $\langle x_0, \infty \rangle$ будет $x_0 \le Ax_0 \le Ax$, и

$$\|Ax\|_\rho \le \begin{cases} L, \|x\|_\rho \le R, \\ \|x\|_\rho, \|x\|_\rho > R, \end{cases} \le R_0.$$

То есть $Ax \in T$. Итак, $AT \subset T$.

Обозначим через M множество всех впереди идущих элементов $x \in T$ оператора A. Так как элемент $x_0 \in T$ является впереди идущим, то $x_0 \in M$, и потому $M \ne \varnothing$.

Покажем, что $AM \subset M$. Возьмем произвольный элемент $x \in M \subset T$. Так как $x \le Ax$ и $Ax \in T$, то в силу монотонности оператора A верно $Ax \le A(Ax)$, и значит, $Ax \in M$. Следовательно, $AM \subset M$, и, как легко видеть, $x_0 \le x \le Ax \le u$ $(x \in M)$.

Введем в M частичный порядок по правилу: $x < y$, если $x, y \in M$, $x \le y$ и $x \ne y$. С этим частичным порядком M становится частично упорядоченным множеством.

Покажем, что оно удовлетворяет всем условиям теоремы Цорна.

Возьмем произвольную цепь $P \subset M$ и покажем, что она ограничена сверху в M. Рассмотрим цепь $AP \subset AM \subset M$. Пусть последовательность $(y_n) \subset AP$ и $y_n = Ax_n$ $(n \in N)$, где $(x_n) \subset P$. Так как последовательность (x_n) является цепью, то из нее можно выделить монотонную подпоследовательность $(x_{n_k}) \subset (x_n)$. Далее, так как $x_0 \le x_{n_k} \le u$, то в силу h-монотонной компактности оператора A последовательность $y_{n_k} = Ax_{n_k}$ $(k \in N)$ компактна. Следовательно, множество AP относительно компактно.

Очевидно, если цепь AP конечна, то ввиду $x \le Ax$ $(x \in P)$ множество P ограничено сверху в M наибольшим элементом цепи $AP \subset M$.

Пусть теперь цепь AP является бесконечным множеством. Тогда ввиду относительной компактности множества AP в нем существует счетное плотное в AP множество $\{y_n\}$.

Очевидно, существуют элементы $x_n \in P$ $(n \in N)$ такие, что $Ax_n = y_n$ $(n \in N)$.

Положим,

$$z_n = x_1 \vee .... \vee x_n,\ w_n = y_1 \vee .... \vee y_n\ (n \in N).$$

Нетрудно видеть, что каждый из элементов z_n и w_n совпадает, соответственно, с одним из элементов $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$ и при этом выполняется равенство $Az_n = w_n$ $(n \in N)$.

Далее, так как $z_n \uparrow$ и $x_0 \le z_n \le u$ $(n \in N)$, то в силу h-монотонной компактности оператора A последовательность $w_n = Az_n$ $(n \in N)$ компактна и вследствие ее монотонности сходится. Пусть $w_n \to w$. Так как $w_n \uparrow$ и $w_n \to w$, то $w_n \le w$ $(n \in N)$.

Далее, так как $w_n = Az_n \in AP \subset AM \subset M \subset T$ $(n \in N)$ и $w_n \to w$, то в силу замкнутости множества T элемент $w \in T$.

С другой стороны, так как $z_n \le Az_n = w_n \le w$ $(n \in N)$, то в силу монотонности оператора на отрезке $\langle x_0, \infty \rangle \supset T$ будет $w_n = Az_n \le Aw$ $(n \in N)$, и значит, ввиду $w_n \to w$ элемент $w \le Aw$, поэтому $w \in M$. Докажем, что $y \le w$ $(y \in AP)$.

В самом деле, возьмем произвольный элемент $y \in AP$. Тогда в силу плотности множества $\{y_n\}$ в AP существует подпоследовательность $y_{n_k} \to y$. Так как $y_{n_k} \le w_{n_k} \le w$ $(k \in N)$, то, переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, мы получим, что $y \le w$.

Но тогда $x \le Ax = y \le w$ $(x \in P)$, поэтому цепь P ограничена сверху в M элементом $w \in M$.

Таким образом, частично упорядоченное множество M удовлетворяет всем условиям теоремы Цорна. Поэтому в множестве M существует максимальный элемент x_*. Так как $x_* \le Ax_* \in M$, то ввиду максимальности элемента x_* в M выполняется равенство $Ax_* = x_*$. Легко видеть, что $\|x_*\|_\rho \le R_0$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Бахтин И. А.* Конусы в пространствах Банаха. – Воронеж : ВГПИ, 1975. – 183 с.

2. *Дорохов А. Н.* Теоремы о неподвижных точках монотонно-компактных операторов в пространствах Фреше с конусом // Вестник ИжГТУ. – 2008. – № 2(38). – С. 144–146.

3. *Канторович Л. В.*, *Акилов, Г. П.* Функциональный анализ. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

4. *Люстерник Л. А.*, *Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. – Высш. шк., 1982. – 272 с.

Получено 24.05.2015

УДК 521.19

Т. Г. Возмищева, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ТРАЕКТОРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДВУХ ЦЕНТРОВ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО И НА СФЕРЕ (часть 2)

Введение

В статье [1] было доказано, что интегрируемые задачи небесной механики, задача Кеплера и задача двух центров переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами. В данной работе покажем, что и системы дифференциальных уравнений, описывающие исследуемые явления, тесно связаны между собой. Именно начиная с Пуанкаре исследуются системы уравнений (в связи с исследованием задач небесной механики), правые части которых не зависят явно от независимого переменного времени, то есть динамические системы. Га-

© Возмищева Т. Г., 2015