Возьмем произвольную цепь $P \subset M$ и покажем, что она ограничена сверху в M. Рассмотрим цепь $AP \subset AM \subset M$. Пусть последовательность $(y_n) \subset AP$ и $y_n = Ax_n$ $(n \in N)$, где $(x_n) \subset P$. Так как последовательность (x_n) является цепью, то из нее можно выделить монотонную подпоследовательность $(x_{n_k}) \subset (x_n)$. Далее, так как $x_0 \le x_{n_k} \le u$, то в силу h-монотонной компактности оператора A последовательность $y_{n_k} = Ax_{n_k}$ $(k \in N)$ компактна. Следовательно, множество AP относительно компактно.

Очевидно, если цепь AP конечна, то ввиду $x \le Ax$ $(x \in P)$ множество P ограничено сверху в M наибольшим элементом цепи $AP \subset M$.

Пусть теперь цепь AP является бесконечным множеством. Тогда ввиду относительной компактности множества AP в нем существует счетное плотное в AP множество $\{y_n\}$.

Очевидно, существуют элементы $x_n \in P$ $(n \in N)$ такие, что $Ax_n = y_n$ $(n \in N)$.

Положим,

$$z_n = x_1 \vee \ldots \vee x_n,\ w_n = y_1 \vee \ldots \vee y_n \ (n \in N).$$

Нетрудно видеть, что каждый из элементов z_n и w_n совпадает, соответственно, с одним из элементов $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ и при этом выполняется равенство $Az_n = w_n$ $(n \in N)$.

Далее, так как $z_n \uparrow$ и $x_0 \le z_n \le u$ $(n \in N)$, то в силу h-монотонной компактности оператора A последовательность $w_n = Az_n$ $(n \in N)$ компактна и вследствие ее монотонности сходится. Пусть $w_n \to w$. Так как $w_n \uparrow$ и $w_n \to w$, то $w_n \le w$ $(n \in N)$.

Далее, так как $w_n = Az_n \in AP \subset AM \subset M \subset T$ $(n \in N)$ и $w_n \to w$, то в силу замкнутости множества T элемент $w \in T$.

С другой стороны, так как $z_n \le Az_n = w_n \le w$ $(n \in N)$, то в силу монотонности оператора на отрезке $\langle x_0, \infty\rangle \supset T$ будет $w_n = Az_n \le Aw$ $(n \in N)$, и значит, ввиду $w_n \to w$ элемент $w \le Aw$, поэтому $w \in M$. Докажем, что $y \le w$ $(y \in AP)$.

В самом деле, возьмем произвольный элемент $y \in AP$. Тогда в силу плотности множества $\{y_n\}$ в AP существует подпоследовательность $y_{n_k} \to y$. Так как $y_{n_k} \le w_{n_k} \le w$ $(k \in N)$, то, переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, мы получим, что $y \le w$.

Но тогда $x \le Ax = y \le w$ $(x \in P)$, поэтому цепь P ограничена сверху в M элементом $w \in M$.

Таким образом, частично упорядоченное множество M удовлетворяет всем условиям теоремы Цорна. Поэтому в множестве M существует максимальный элемент x_*. Так как $x_* \le Ax_* \in M$, то ввиду максимальности элемента x_* в M выполняется равенство $Ax_* = x_*$. Легко видеть, что $\|x_*\|_\rho \le R_0$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Бахтин И. А.* Конусы в пространствах Банаха. – Воронеж : ВГПИ, 1975. – 183 с.

2. *Дорохов А. Н.* Теоремы о неподвижных точках монотонно-компактных операторов в пространствах Фреше с конусом // Вестник ИжГТУ. – 2008. – № 2(38). – С. 144–146.

3. *Канторович Л. В.*, *Акилов, Г. П.* Функциональный анализ. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

4. *Люстерник Л. А.*, *Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. – Высш. шк., 1982. – 272 с.

Получено 24.05.2015

УДК 521.19

Т. Г. Возмищева, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ТРАЕКТОРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДВУХ ЦЕНТРОВ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО И НА СФЕРЕ (часть 2)

Введение

В статье [1] было доказано, что интегрируемые задачи небесной механики, задача Кеплера и задача двух центров переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами. В данной работе покажем, что и системы дифференциальных уравнений, описывающие исследуемые явления, тесно связаны между собой. Именно начиная с Пуанкаре исследуются системы уравнений (в связи с исследованием задач небесной механики), правые части которых не зависят явно от независимого переменного времени, то есть динамические системы. Гамильтонова система – частный случай динамической системы.

Одной из основных качественных характеристик интегрируемой гамильтоновой системы является структура ее лиувиллева слоения, т. е. слоения фазового пространства на инвариантные торы (или цилиндры) Лиувилля и особые интегральные подмногообразия. Теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем была построена А. Т. Фоменко и Х. Цишангом в цикле работ (в частности, в работах [2, 3]). Дальнейшее развитие эта тема для задач небесной механики получила в работах [4, 5].

Топологические инварианты Фоменко – Цишанга

В этом параграфе мы приведем основные обозначения, определения и результаты теории, необходимые для топологического анализа интегрируемых задач небесной механики.

Результатом теоремы Лиувилля является утверждение, что неособая компактная поверхность уровня первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы есть объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Возникает вопрос, как перестраиваются торы Лиувилля в окрестности критических поверхностей уровня первых интегралов.

Рассмотрим гамильтонову систему $v = \operatorname{sgrad} H$ на 4-мерном симплектическом многообразии M^4. Как известно, в случае двух степеней свободы для интегрируемости системы v достаточно иметь два первых интеграла, то есть интеграл энергии и только один дополнительный интеграл F, функционально независимый с интегралом энергии (почти всюду на многообразии M^4).

Траектории интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы лежат на совместных поверхностях уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла F. Каждая неособая компактная связная компонента совместной поверхности уровня функций H и F является 2-мерным тором. Таким образом, всё фазовое пространство системы является объединением этих торов (торов Лиувилля) и некоторых особых слоев (содержащих точки, где функции H и F зависимы). Напомним, что разбиение фазового пространства интегрируемой системы называется слоением Лиувилля. Его слоями являются связные компоненты множеств $\{H(x)=h, F(x)=f\}$. Мы рассматриваем слоение Лиувилля не во всем (4-мерном) фазовом пространстве, а на его 3-мерных подмногообразиях. Естественно, эти подмногообразия должны содержать каждый слой лиувиллева слоения целиком. Поэтому их можно представлять как прообразы некоторых кривых (на плоскости) на бифуркационной диаграмме при отображении момента $x \mapsto (H(x), F(x))$. В частности, в качестве этих кривых можно рассматривать прямые $h = \text{const}$. В этом случае говорят о лиувиллевом слоении на (3-мерной) *изоэнергетической поверхности* $Q_h^3 = \{H(x)=h\}$. Очевидно, его слоями являются связные компоненты множеств $\{\tilde{F}(x)=f\}$, где $\tilde{F}$ – ограничение интеграла F на Q_h^3.

Отметим, что если две регулярные окрестности особых слоев имеют эквивалентные атомы, то существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм одной на другую, который сохраняет слоение Лиувилля и переводит невырожденные критические окружности в невырожденные критические окружности с сохранением естественной на них ориентации, заданной полем системы.

В исследуемых задачах встречаются лишь следующие 4 атома (рис. 1):

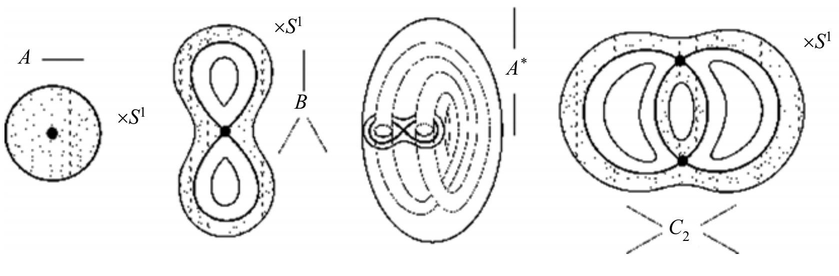

Рис. 1. Атомы A, B, A^*, C_2

На рисунке:

атом A – полноторие ($S^1 \times D^2$), расслоенное на концентрические торы (особый слой – окружность, ось полнотория);

атом B – полноторие, из которого вырезаны два тонких полнотория, ($N^2 \times S^1$) (особый слой – прямое произведение «восьмерки» на окружность, N^2 – окрестность «восьмерки»);

атом A^* – полноторие, из которого вырезано одно тонкое полноторие, обходящее два раза вдоль оси, ($N^2 \tilde{\times} S^1$) (особый слой – косое произведение «восьмерки» на окружность);

атом C_2 – полноторие, из которого вырезаны три тонких полнотория, ($M^2 \times S^1$) (особый слой – прямое произведение «двух пересекающихся окружностей» на окружность, M^2 – окрестность «двух пересекающихся окружностей»).

Атомы описывают бифуркации торов Лиувилля при прохождении критического значения функции $\tilde{F}$. Атому A соответствует рождение или исчезновение тора, атому B – распад одного тора на два или слияние двух торов в один, атому A^* – перестройка одного тора в один тор, атому C_2 – перестройка двух торов в два тора.

Границы атомов склеиваются при помощи однопараметрических семейств торов Лиувилля, не содержащих особых слоев. Схему этой склейки можно описать при помощи ориентированного графа, каждой вершине которого сопоставлен некоторый атом, а ребрам – однопараметрические семейства торов.

На основе указанного подхода в качественной теории интегрируемых гамильтоновых систем строится классификация таких слоений на трехмерных изоэнергетических поверхностях. В данной работе также применяется техника топологического анализа интегрируемых задач.

Две гладкие динамические системы называются траекторно (или орбитально) эквивалентными, если существует гомеоморфизм одного многообразия на другое, который переводит траектории первой системы в траектории второй системы с сохранением их естественной ориентации (при этом не требуется, чтобы сохранялось время вдоль траекторий). В физике и механике часто возникает следующая задача. Пусть даны две интегрируемые гамильтоновые системы. Надо узнать, являются ли они лиувиллево эквивалентными. В данной работе доказана теорема о лиувиллевой эквивалентности задачи двух центров на сфере, пространстве Лобачевского и плоскости при условии ограниченного движения (в случае сферы ограниченное движение соответствует движению по верхней полусфере).

Сравнительный анализ топологии лиувиллевых слоений задачи двух центров

Напомним, что v_1 – интегрируемая гамильтонова система на M_1^4 $\left(\text{соответственно, на } Q_1^3\right)$, где M_1^4 – кокасательное расслоение к сфере T^*S^2 с гамильтонианом $H_{S^2} = T + V$. Притягивающие центры расположены на сфере в точках с координатами $\mathbf{r}_1 = (\alpha, \beta, 0)$ и $\mathbf{r}_2 = (-\alpha, \beta, 0)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, под действием ньютоновского притяжения которых движется материальная частица. Квадратичная по импульсам функция T определяется стандартной метрикой на сфере S^2 в $\mathbb{R}^3$, а функция V задана формулой [6]. v_2 – интегрируемая гамильтонова система на M_2^4 $\left(\text{соответственно, на } Q_2^3\right)$, где M_2^4 – кокасательное расслоение к псевдосфере T^*L^2 с гамильтонианом $H_{L^2} = T + V$, где кинетическая энергия T определяется стандартной метрикой на псевдосфере L^2 в $\mathbb{R}_1^2$, а потенциальная энергия задается формулой [7]. v_3 – интегрируемая гамильтонова система на M_3^4 (соответственно, на Q_3^3), где M_3^4 – фазовое пространство в задаче двух неподвижных центров на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гамильтонианом $H_{\mathbb{R}^2} = T + V$, где кинетическая энергия T определяется стандартной евклидовой метрикой на плоскости $\mathbb{R}^2$, а потенциал является ньютоновским.

Теорема. Система v_1 при условии, что материальная частица находится все время в верхней полусфере, то есть при энергиях, удовлетворяющих условию $h < \dfrac{l}{\beta^2}$, система v_2 при условии $h < -1$ и система v_3 при условии $h < 0$, то есть в случае ограниченного движения, являются лиувиллево эквивалентными.

Доказательство. Координаты на сфере, в которых гамильтониан задачи двух центров имеет лиувиллев вид, – сфероконические координаты ξ, η. Координатными линиями этой системы координат являются линии пересечения сферы с двумя семействами конфокальных конусов с вершиной в центре сферы – квадрики. Геометрические свойства этих линий на сфере во многом аналогичны свойствам обычных эллипсов и гипербол на плоскости. Кроме того, они являются кеплеровскими орбитами в задаче о движении точки по сфере в поле, создаваемом одним центром. Как было отмечено в работе [8], проекции торов Лиувилля в задаче двух неподвижных центров на сфере могут заходить за экватор сферы, что в случаях плоского пространства и пространства Лобачевского соответствует уходу на бесконечность. Случаи, когда материальная точка заходит за экватор и когда остается все время в верхней полусфере, разделяются прямой $l = \dfrac{h\beta^2}{R}$ на бифуркационной диаграмме (рис. 2) (l – значение дополнительного интеграла). При $\eta^2 = \beta^2$ материальная точка пересекает экватор, что соответствует уходу на бесконечность. При $h < -1$ все траектории в задаче двух центров в пространстве Лобачевского ограничены, то есть мы имеем движение эллиптического типа. Фазовое пространство для таких энергий является компактным (после регуляризации), следовательно, система удовлетворяет теореме Лиувилля. Изоэнергетические поверхности расслоены на торы Лиувилля. Аналогично, для плоской задачи двух центров при $h < 0$ все траектории ограничены, и существует движение только эллиптического типа. Фазовое пространство для таких энергий также является компактным (после регуляризации), и система удовлетворяет теореме Лиувилля. Изоэнергетические поверхности также расслоены на торы Лиувилля.

Известно, что если две регулярные окрестности особых слоев имеют эквивалентные атомы, то существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм одной на другую, который сохраняет слоение Лиувилля и переводит невырожденные критические окружности в невырожденные критические окружности с сохранением естественной на них ориентации, заданной полем динамической системы.

Для того чтобы описать топологическую структуру лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности Q_h, достаточно описать это слоение в малых инвариантных окрестностях особых слоев и указать, как из этих окрестностей склеено все многообразие Q_h, то есть построить топологические инварианты – инварианты Фоменко – Цишанга.

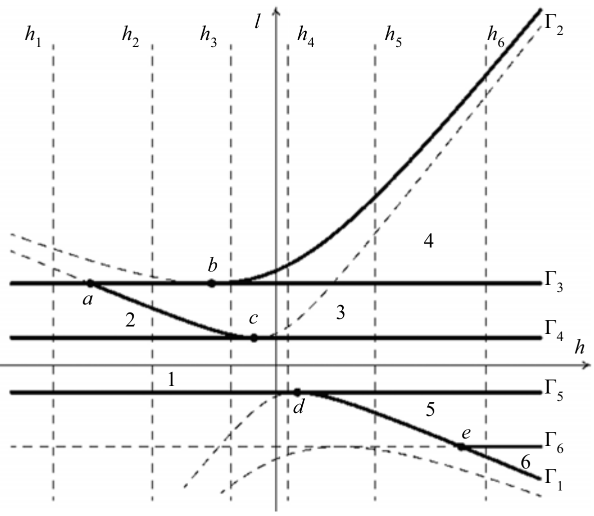

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для задачи двух центров на сфере

Бифуркационное множество разбивает образ отображения момента на области так, что при движении точки внутри такой области торы Лиувилля в прообразе этой точки не испытывают бифуркаций. Таким образом, каждой области соответствует определенное число торов Лиувилля: для областей 1, 3, 5 в прообразах точек лежит один тор, а для областей 2, 4, 6 – два тора.

Чтобы доказать лиувиллеву эквивалентность двух динамических систем, нужно показать, что топологические инварианты одинаковы для этих систем. Исследование топологии натуральных механических систем проводится при помощи проекции на конфигурационное пространство. Каждый тор Лиувилля проектируется в область возможного движения. Проекции торов для систем v_1, v_2 и v_3 (при наложенных на энергию условиях) на конфигурационное пространство (сферу, псевдосферу и плоскость) топологически одинаковы, как одинаковы и типы движений для этих областей (1, 2, 3, 4).

В области 1 (см. рис. 2) мы имеем спутниковое движение (аналогичное движение существует для плоского пространства и пространства Лобачевского, планета движется около одного центра, орбита может всюду плотно заметать всю область). Если точка $x \in \mathbb{R}^2(h,l)$ находится слева от прямой $l = -\dfrac{h\alpha^2}{R}$, то на конфигурационном пространстве этот случай соответствует движению только на правой полусфере. При пересечении прямой материальная частица заходит на левую полусферу. Каждой из указанных областей соответствует определенное число торов Лиувииля, число торов совпадает для трех рассматриваемых систем для каждой области возможного движения в прообразе (в областях 1, 3 – один тор, в областях 2, 4 – два тора). Число торов для системы v_1 и v_2 было определено в работе [9], для системы v_3 число торов определяется на основе анализа квадратур, приведенных в работе [10]. Кроме того, совпадает число критических точек и критических окружностей и их проекции на конфигурационное пространство при предельных движениях. Выбор базисных циклов допустимой системы координат при склейке инвариантных окрестностей особых слоев также аналогичен. Таким образом, топологические инварианты для рассматриваемых систем одинаковы (при наложенных на энергию условиях), – это молекулы 1, 2, 3 (см. рис. 3).

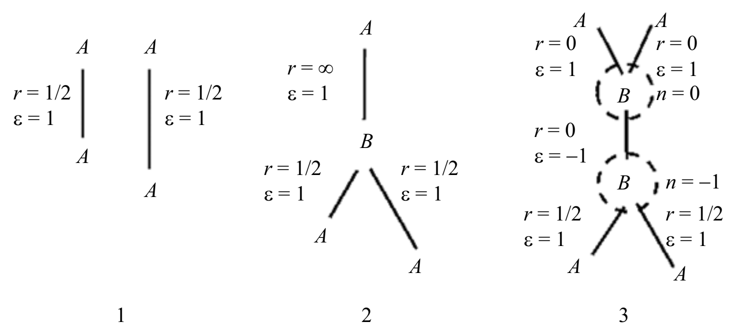

Рис. 3. Изоэнергетические молекулы

Мы показали, что рассматриваемые системы имеют одинаковое слоение Лиувилля, следовательно, они являются лиувиллево эквивалентными. При этом траектории каждой из рассматриваемых систем переходят в траектории другой системы с сохранением их естественной ориентации (если рассматривать ограниченное движение).

Таким образом, в статье подтверждаются выводы Клиффорда, которые были сделаны на основании теории, развитой Риманом. 1. Малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно там несправедливы обычные законы геометрии. 2. Свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны. 3. Изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи.

Библиографические ссылки

1. *Возмищева Т. Г.* Траекторная эквивалентность задачи двух центров в плоском пространстве, в пространстве Лобачевского и на сфере: предельный переход (часть 1) // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2015. – № 2(66). – С. 112–114.

2. *Болсинов А. В.*, *Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. – Т. 1, 2. – Изд. дом Удм. ун-та, 1999.

3. *Болсинов А. В.*, *Фоменко А. Т.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 4. – С. 27–80 ; Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 5. – С. 27–78.

4. *Возмищева Т. Г.* Классификация движений для обобщения задачи Эйлера на сферу // Матем. сб. – Изд-во Удм. ун-та, 1998. – С. 34–40.

Получено 19.06.2015

5. *Возмищева Т. Г.*, *Ошемков А. А.* Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 8. – С. 3–38.

6. *Vozmischeva T. G.* The two center and Lagrange problem in the Lobachevsky space // Proc. Int. Conf. Geometry, Integrability, and Quantization.

7. *Vozmischeva T. G.* Classification of motions for generalization of the two center problem on a sphere Cel. Mech. and Dyn. Astr. – 2000. – Vol. 77. – Pp. 37–48.

8. *Vozmischeva T. G.* Integrable problems of celestial mechanics in spaces of constant curvature. Journal of Mathematical Sciences. – 2005. Vol. 125. – No. 5. – Pp. 419–532.

9. *Возмищева Т. Г.*, *Ошемков А. А.* Указ. соч.

10. *Дубошин А. Г.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М. : Наука, 1964. – 560 с.