

УДК 534.014.2

А. Е. Калинин, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК, ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ С РАЗНЫМИ ЧАСТОТАМИ

Введение

В имеющейся отечественной (например, [1–3]) и иностранной литературе (например, [4–6]) отсутствуют сведения по анализу вынужденных колебаний механических конструкций, которые эксплуатируются под действием нескольких гармонических нагрузок, изменяющихся с различными частотами.

В работе [7, с. 464] кратко рассматривается простой случай о колебаниях слабо нелинейной механической системы в виде материальной точки, на которую одновременно действуют две гармонические силы: $P1(t) = P1 \cdot \cos(p1 \cdot t)$ и $P2(t) = P2 \cdot \cos(p2 \cdot t)$. В этом случае решение уравнения динамического равновесия материальной точки предлагается принять в следующем виде: $X(t) = A1 \cdot \cos(p1 \cdot t) + A2 \cdot \cos(p2 \cdot t)$. К сожалению, такой подход имеет сугубо ограниченное применение для современных механических конструкций со сложной геометрией и конечным числом действующих на конструкцию разнообразных гармонических нагрузок (сосредоточенные и погонные силы, давления и т. п.).

С учетом сказанного для решения задач о вынужденных колебаниях произвольной механической конструкции, нагруженной некоторой системой произвольных гармонических нагрузок, предлагается использование численного метода конечных элементов [8]. Последовательность решения указанной задачи включает выполнение следующих основных этапов:

1. Построение модели рассматриваемой конструкции.
2. Определение собственных частот конструкции.
3. Задание нагрузок для выполнения динамического расчета.
4. Нестационарный расчет конструкции.
5. Просмотр результатов динамического расчета.

Постановка задачи

В качестве примера рассмотрим статически неопределимый прямой стержень прямоугольного поперечного сечения, который на левом конце зашпелен, а в правой части имеет шарнирно-подвижную опору на расстоянии $L2$ от правого конца стержня (рис. 1).

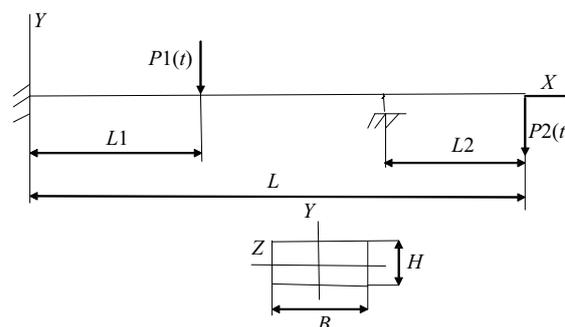


Рис. 1. Схема стержня

На расстоянии $L1$ от левой опоры стержень нагружен поперечной гармонической сосредоточенной силой $P1(t) = P1 \cdot \sin(\text{OMEGAP1} \cdot t)$, где $P1$ – амплитуда силы, OMEGAP1 – частота изменения силы; t – время. На правом конце стержень нагружен другой поперечной гармонической сосредоточенной силой $P2(t) = P2 \cdot \sin(\text{OMEGAP2} \cdot t)$, где $P2$ – амплитуда силы; OMEGAP2 – частота изменения силы; t – время.

Размеры стержня: длина $L = 1,5$ м; ширина поперечного сечения $B = 0,02$ м; высота $H = 0,015$ м. Материал стержня: сталь (модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7850$ кг/м³).

Далее представлено решение этой задачи численным методом конечных элементов с помощью программы Ansys [9], используемой в интерактивном режиме.

Вначале выполняем установочные операции: задаем имя директории, в которой будут храниться все файлы, создаваемые при решении задачи; задаем имя выполняемой работы и заголовок задачи; выбираем систему единиц измерения (SI).

1. Построение модели стержня

Задаем параметры стержня: **Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters**. Для рассматриваемого стержня нужно ввести следующие параметры:

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| L = 1.5 | ! длина стержня |
| B = 0.02 | ! ширина поперечного сечения |
| H = 0.015 | ! высота сечения |
| A = B*H | ! площадь сечения |
| JZ = B*(H**3)/12 | ! момент инерции сечения |

$L1 = L/3$! точка приложения силы $P1(t)$
$L2 = L/3$! длина консоли
$E = 2E11$! модуль упругости материала
$Nu = 0.3$! коэффициент Пуассона
$RO = 7850$! плотность материала

1. Выбираем тип конечного элемента: Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete... В появившемся окне *Library of Element Types* выбираем балочный элемент BEAM3 (Beam 2D elastic), который имеет 3 степени свободы (перемещения вдоль осей X и Y и поворот вокруг оси Z).

2. Задаем вещественные константы выбранного элемента: Main Menu > Preprocessor > Real Constants...> Add... В появившемся окне Real Constants for BEAM3 вводим следующие геометрические параметры: Cross-sectional area AREA: A ; Area Moment of Inertia IZZ: JZ ; Total beam height HEIGHT: H .

В результате этих действий будет задан балочный элемент с прямоугольным поперечным сечением размером $B \times H$.

3. Создаем 2 ключевые точки: Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Keypoints > In Active CS. Координаты нужных ключевых точек приведены в таблице:

№ ключевой точки	$X, м$	$Y, м$
1	0	0
2	L	0

4. Создаем прямую линию: Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Lines > Lines > Straight Line. Создаем линию между точками 1 и 2.

5. Задаем константы упругости материала стержня: Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Isotropic. В появившемся окне вводим E в поле для модуля Юнга E_X и вводим Nu в поле для коэффициента Пуассона $PRXY$.

Задаем плотность материала: Material Model Number 1 > Structural > Density. В появившемся окне вводим RO в поле **DENS**.

6. Задаем размер конечных элементов: Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > Manual Size > Lines > All Lines... Для данного примера создадим 15 элементов вдоль оси стержня: вводим **15** в поле **NDIV No. of element divisions**.

7. Разделяем стержень на конечные элементы: Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Lines > выбираем опцию Pick All.

При желании строим изображение узлов: **Utility Menu -> Plot -> Nodes** и включаем нумерацию узлов: **Utility Menu -> Plot Controls -> Numbering...** Для **NODE Node Numbers** выбираем **ON**.

8. Задаем геометрические граничные условия для рассматриваемого стержня: Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes. Появляется окно **Apply U, ROT on Nodes**. Выбираем узел **1** в графическом окне > **Apply**. В окне **Apply U, ROT on Nodes** нужно выбрать запрещенные степени свободы в узле **1**, т. е. All DOF. Нажать **Apply**. После этого на экране появляются сим-

волы ограничения всех степеней свободы в крайнем левом узле **1**.

Теперь выбираем узел, который находится на расстоянии $L2$ от правого конца стержня. Нажимаем **Apply**. Появляется снова окно **Apply U, ROT on Nodes**. В правой части этого окна выбираем **UY**. Нажимаем **OK**. После этого на экране появляются символы ограничения вертикальных перемещений в выбранном узле стержня.

9. Сохраняем выполненную работу: Utility Menu > File > Save As...

II. Определение собственных частот стержня

1. Выбираем модальный тип расчета: Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis. В окне New Analysis выбираем модальный расчет Modal.

2. Задаем опции модального расчета: Main Menu > Solution > Analysis Type > Analysis Options. В появившемся окне выбираем метод **Subspace** и вводим **2** в поле No. of modes to extract. Активируем опцию Expand mode shapes и вводим **2** в поле No. of modes to expand. Щелкнуть кнопку **OK**. В появившемся диалоговом окне будем использовать опции по умолчанию, поэтому для выхода из этого окна нужно щелкнуть кнопку **OK**.

3. Решить уравнения модального расчета: Main Menu > Solution > Solve > Current LS.

4. Просмотр результатов модального расчета.

4.1. Получить список собственных частот стержня: Main Menu > General Postproc > Results Summary... Появляется список собственных частот в Гц:

SET	TIME/FREQ
1	26.478
2	70.469

Значение частоты основного (первого) тона $FREQ1 = 26.478$ Гц.

Значение частоты второго тона $FREQ2 = 70.469$ Гц.

В этом списке приведены значения технических частот; для перехода к круговым частотам ω эти значения нужно умножить на 2π : $\omega_1 = 166,3$ 1/сек., $\omega_2 = 442,5$ 1/сек.

Примечание: для получения большей точности определения частот нужно сделать сетку более мелкой (т. е. вместо 15 элементов нужно разбить стержень на 20 или более элементов в зависимости от выбранной величины повышенной точности).

4.2. При желании можно просмотреть формы свободных колебаний стержня.

4.2.1. Выбрать результаты для первой формы колебаний: Main Menu > General Postproc > Read Results > First Set и построить изображение первой формы колебаний: Main Menu > General Postproc > Plot Results > Deformed shape. Выбрать Def + undef edge. На экране появляется изображение первой формы свободных колебаний стержня.

4.2.2. Просмотр следующей формы колебаний: Main Menu > General Postproc > Read Results > Next Set. Теперь нужно выбрать Main Menu > General

Postproc > Plot Results > Deformed shape. Выбрать Def + undef edge.

III. Задание нагрузок для выполнения динамического расчета

1. Создаем функцию для задания силы $P1(t)$ в середине пролета стержня: **Utility Menu > Parameters > Functions > Define/Edit...** В появившемся окне **Function Editor** в разделе **Function Type** выбираем **Single Equation**. В поле **Result** вводим $500 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 24.9 \cdot \{TIME\})$. Для вывода на экран графика созданной функции нужно в окне **Function Editor** выбрать операцию **GRAPH**.

2. Сохранить выполненную работу: **Utility Menu > File > Save**. Присвоить имя файлу: **Load500P1.func > Save**.

3. Прочитать созданную функцию из файла: **Utility Menu > Parameters > Functions > Read from File...** Выбрать **Load500P1.func > Open**.

В появившемся окне **Function loader** вводим **Sin500P1** в поле **Table Parameter Name**.

4. Приложить силу $P1(t)$ в середине пролета стержня: **Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Force > On Nodes**. Выбрать узел в середине пролета стержня и в появившемся окне **Apply Force On Nodes** выбрать **Existing Table**, затем ввести **Sin500P1** в поле **Existing Table**.

5. Аналогично создаем функцию для задания силы $P2(t)$ на правом конце стержня: **Utility Menu > Parameters > Functions > Define/Edit...** В появившемся окне **Function Editor** в разделе **Function Type** выбираем **Single Equation**, а в поле **Result** вводим $700 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 72.4 \cdot \{TIME\})$. Для вывода на экран графика созданной функции нужно в окне **Function Editor** выбрать операцию **GRAPH**.

6. Сохранить выполненную работу: **Utility Menu > File > Save**. Присвоить имя файлу: **Load700P2.func > Save**.

7. Прочитать функцию из файла: **Utility Menu > Parameters > Functions > Read from File...** Выбрать **Load700P2.func > Open**. В появившемся окне **Function loader** вводим **Sin700P2** в поле **Table Parameter Name**.

8. Приложить силу $P2(t)$ на правом конце стержня: **Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Force > On Nodes**. Выбрать узел на правом конце стержня и в появившемся окне **Apply Force On Nodes** выбрать **Existing Table**. Ввести **Sin700P2** в поле **Existing Table**.

В результате проведенных операций была сформирована расчетная модель стержня, готовая для выполнения расчета нестационарного поведения стержня.

IV. Нестационарный расчет стержня

1. Выбрать нестационарный тип расчета: **Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis**. Выбираем опции **Transient** и **Full**.

2. Установить управление расчетом: **Sol'n Controls > Basic Tab**.

Задаем время окончания расчета: ввести **5** в поле **Time at end of loadstep**.

Выбрать опцию **Time Increment**.

Задаем шаг интегрирования по времени: ввести **0.01** в поле **Time step size**.

В разделе **Frequency**: выбрать **Write every sub-steps**.

3. Открыть панель **Transient** и в ней выбрать опцию **Ramped Loading**.

4. Решить шаги нагружения нестационарного расчета: **Main Menu > Solution > Solve > Current LS**.

V. Просмотр результатов динамического расчета стержня

Этот этап расчета выполняется с помощью инструмента **Time Hist PostProcessor (POST26)** программы Ansys.

1. Построение графика изменения вертикального перемещения UY в узле с координатой $x = L1$, т. е. в точке приложения силы $P1(t)$.

1.1. Выбрать **TimeHist Postpro > Variable Viewer...** В появившемся окне выбираем операцию **Add**. Во вновь появившемся окне выбираем **Nodal Solution > DOF Solution > Y-Component of displacement**.

1.2. Графически выбрать узел с координатой $x = L1$, после этого в окне 'Time History Variables' появляется строка с выбранным перемещением UY_2 .

1.3. Строим график зависимости UY_2 от времени: в окне **Time History Variables** выбрать операцию **Plot**. После этого на экране монитора появляется график (рис. 2).

2. Получить список значений перемещений UY_2 в зависимости от времени: в окне **Time History Variables** выбрать операцию **List**. Появляется такая таблица:

TIME	UY_2	TIME	UY_2
0.10000E-01	0.316801E-03	4.8100	0.159830E-01
0.20000E-01	0.622984E-02	4.8200	-0.261543E-02
0.30000E-01	0.361767E-02	4.8300	-0.146733E-01
0.40000E-01	-0.165508E-01	4.8400	0.661942E-02
0.50000E-01	-0.452033E-02	4.8500	0.117638E-01
0.60000E-01	0.260837E-01	4.8600	-0.100030E-01
0.70000E-01	0.578102E-03	4.8700	-0.748241E-02
0.80000E-01	-0.279372E-01	4.8800	0.124144E-01
0.90000E-01	0.178040E-02	4.8900	0.221116E-02
0.10000	0.242666E-01	4.9000	-0.134858E-01
0.11000	0.467020E-03	4.9100	0.340985E-02
0.12000	-0.215829E-01	4.9200	0.130730E-01
0.13000	-0.183790E-02	4.9300	-0.866765E-02
0.14000	0.194592E-01	4.9400	-0.113201E-01
0.15000	-0.186205E-02	4.9500	0.130361E-01
0.16000	-0.123167E-01	4.9600	0.845226E-02
0.17000	0.653572E-02	4.9700	-0.161548E-01
0.18000	0.329008E-04	4.9800	-0.466760E-02
0.19000	-0.660571E-02	4.9900	0.176800E-01
0.20000	0.102059E-01	5.0000	0.279924E-03

3. Аналогично вышеизложенному строим график для перемещения во времени правого узла стержня, где приложена гармоническая сила $P2(t)$ (рис. 3).

4. По аналогии с пунктом 2 можно получить список значений перемещений UY_3 в зависимости от времени: в окне **Time History Variables** выбираем операцию **List**.

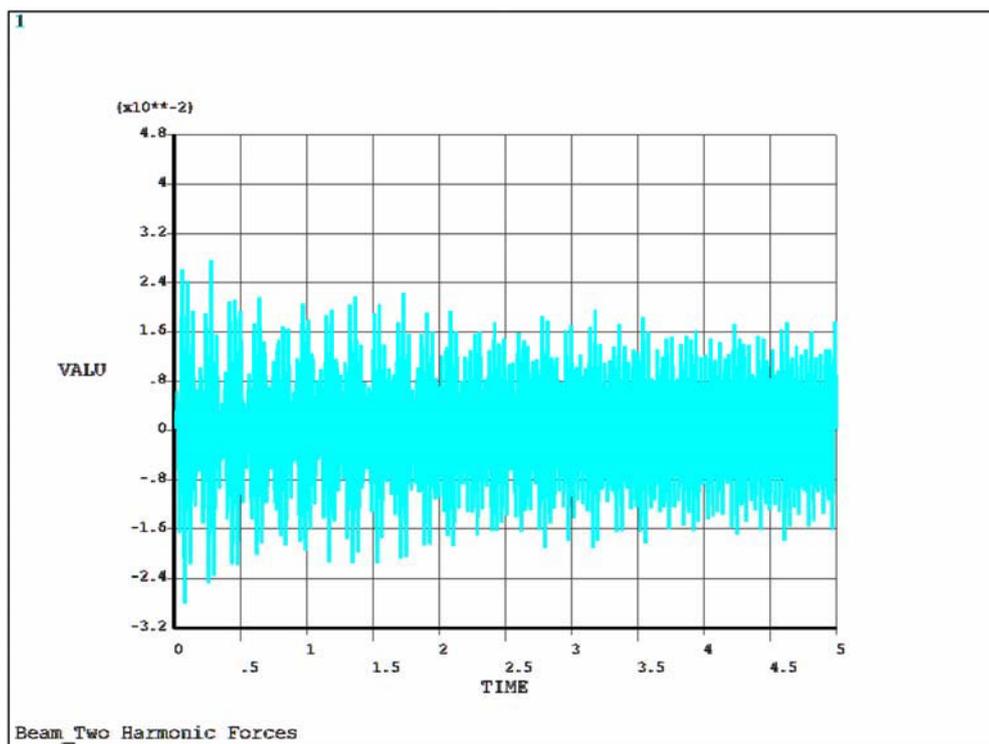


Рис. 2. График изменения вертикального перемещения UY_2 во времени

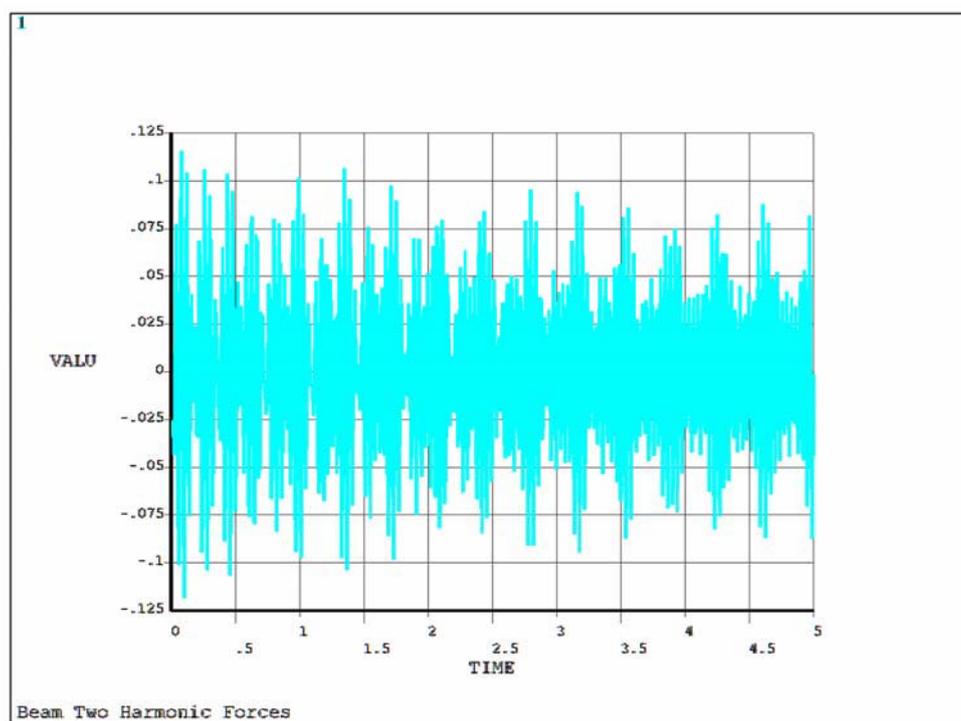


Рис. 3. График изменения вертикального перемещения UY_3 во времени

Заключение

Наша практика использования предложенного метода и рассмотренной выше процедуры его реализации показала работоспособность метода и процедуры при анализе вынужденных колебаний практически любых по сложности устройства механических конструкций (сосредоточенные массы, стержни, пластины,

оболочки, комбинированные конструкции) при произвольно изменяющихся во времени внешних нагрузках (сосредоточенные силы и моменты, погонные нагрузки, давления и объемные нагрузки), что объясняется универсальностью используемого при решении таких задач метода конечных элементов.

Библиографические ссылки

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний : учебник для вузов. – М. : Высш. шк., 1980. – 408 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. А. Теория колебаний. – М. : Наука, 1981. – 568 с.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний : учебник. – СПб. : Лань, 2005. – 440 с.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. : Наука, 1967. – 444 с.

Получено 01.10.2015

5. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. – М. : Машиностроение, 1982. – 304 с.
6. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 736 с.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
9. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М. : Пресс, 2005. – 640 с.

УДК 538.9(045)+531.26(045)

Т. Г. Возмищева, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ВЗАИМНО ПРОНИКАЮЩИМИ ОБОЛОЧКАМИ

Введение

В работах [1, 2, 3] представлены результаты исследования обобщения задачи Кеплера и задачи двух центров на случай постоянной кривизны, то есть динамическая система рассматривается на сфере (положительная кривизна) и пространстве Лобачевского (отрицательная кривизна). Проведена регуляризация задачи Кеплера на сфере. Построены бифуркационные диаграммы на сфере и в пространстве Лобачевского.

В данной работе рассматривается материальная точка и сферическая поверхность, на которой равномерно распределена масса. Между этими объектами действует гравитационное притяжение. Реальные тела в природе, строго говоря, всегда неоднородны, однако неоднородность может оказаться достаточно слабой, и мы можем пренебречь ею. Кроме того, рассматриваемое тело может оказаться таким, что одно или два измерения малы по сравнению с другими, тогда тело можно заменить более простой моделью. В небесной механике такими объектами может быть кольцо Сатурна, наша Галактика, которую можно рассматривать как диск или сферическая поверхность.

Еще Ньютоном было установлено [4], что однородная сфера не притягивает внутренних точек. Саму сферу можно рассматривать как материальную точку, помещенную в центр сферы, в которой сосредоточена вся масса сферы, именно эта материальная точка притягивает все внешние точки.

Так как гравитационный и кулоновский потенциалы одинаковы (отличаются лишь константами), мы также будем рассматривать и моделирование кулоновского взаимодействия.

Для моделирования формирования кристаллических решеток в работах [5, 6] предложена модель взаимно проникающих сфер. Предполагается, что

заряд внешних электронов равномерно распределен по оболочке, радиус которой и является радиусом атома. При сближении двух неоднородных шаров, моделирующих атомы, их оболочкам разрешено проникать одна в другую, при этом образуется зона взаимного проникновения (рис. 1).

При формировании плотноупакованной решетки оболочкам запрещено проникать друг в друга дальше определенного расстояния. Плотная упаковка неоднородных шаров согласно парному взаимодействию формируется до соприкосновения областей взаимного проникновения с внутренними шарами.

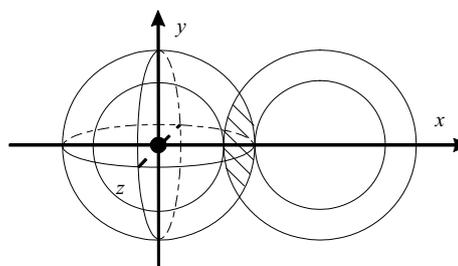


Рис. 1. Модель взаимного проникновения

Вычисление силы взаимодействия

Рассмотрим притягивающий центр M , то есть материальную точку, и поместим ее в начало координат (рис. 2).

Фундамент, на котором построена небесная механика и механика космического полета – это ньютоновский закон тяготения. В ньютоновской теории гравитация описывается потенциалом $V = -\gamma \frac{1}{r}$ (кулоновское взаимодействие аналогично). Здесь γ характеризует силу притяжения между материальной частицей и поверхностью.