

### Библиографические ссылки

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний : учебник для вузов. – М. : Высш. шк., 1980. – 408 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. А. Теория колебаний. – М. : Наука, 1981. – 568 с.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний : учебник. – СПб. : Лань, 2005. – 440 с.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. : Наука, 1967. – 444 с.

Получено 01.10.2015

5. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. – М. : Машиностроение, 1982. – 304 с.
6. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 736 с.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
9. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М. : Пресс, 2005. – 640 с.

УДК 538.9(045)+531.26(045)

Т. Г. Возмищева, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ВЗАИМНО ПРОНИКАЮЩИМИ ОБОЛОЧКАМИ

### Введение

В работах [1, 2, 3] представлены результаты исследования обобщения задачи Кеплера и задачи двух центров на случай постоянной кривизны, то есть динамическая система рассматривается на сфере (положительная кривизна) и пространстве Лобачевского (отрицательная кривизна). Проведена регуляризация задачи Кеплера на сфере. Построены бифуркационные диаграммы на сфере и в пространстве Лобачевского.

В данной работе рассматривается материальная точка и сферическая поверхность, на которой равномерно распределена масса. Между этими объектами действует гравитационное притяжение. Реальные тела в природе, строго говоря, всегда неоднородны, однако неоднородность может оказаться достаточно слабой, и мы можем пренебречь ею. Кроме того, рассматриваемое тело может оказаться таким, что одно или два измерения малы по сравнению с другими, тогда тело можно заменить более простой моделью. В небесной механике такими объектами может быть кольцо Сатурна, наша Галактика, которую можно рассматривать как диск или сферическая поверхность.

Еще Ньютоном было установлено [4], что однородная сфера не притягивает внутренних точек. Саму сферу можно рассматривать как материальную точку, помещенную в центр сферы, в которой сосредоточена вся масса сферы, именно эта материальная точка притягивает все внешние точки.

Так как гравитационный и кулоновский потенциалы одинаковы (отличаются лишь константами), мы также будем рассматривать и моделирование кулоновского взаимодействия.

Для моделирования формирования кристаллических решеток в работах [5, 6] предложена модель взаимно проникающих сфер. Предполагается, что

заряд внешних электронов равномерно распределен по оболочке, радиус которой и является радиусом атома. При сближении двух неоднородных шаров, моделирующих атомы, их оболочкам разрешено проникать одна в другую, при этом образуется зона взаимного проникновения (рис. 1).

При формировании плотноупакованной решетки оболочкам запрещено проникать друг в друга дальше определенного расстояния. Плотная упаковка неоднородных шаров согласно парному взаимодействию формируется до соприкосновения областей взаимного проникновения с внутренними шарами.

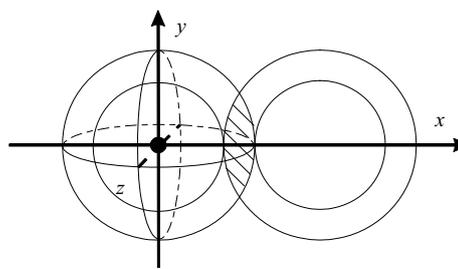


Рис. 1. Модель взаимного проникновения

### Вычисление силы взаимодействия

Рассмотрим притягивающий центр  $M$ , то есть материальную точку, и поместим ее в начало координат (рис. 2).

Фундамент, на котором построена небесная механика и механика космического полета – это ньютоновский закон тяготения. В ньютоновской теории гравитация описывается потенциалом  $V = -\gamma \frac{1}{r}$  (кулоновское взаимодействие аналогично). Здесь  $\gamma$  характеризует силу притяжения между материальной частицей и поверхностью.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса  $R$  и с центром в точке  $O(l, 0, 0)$ .

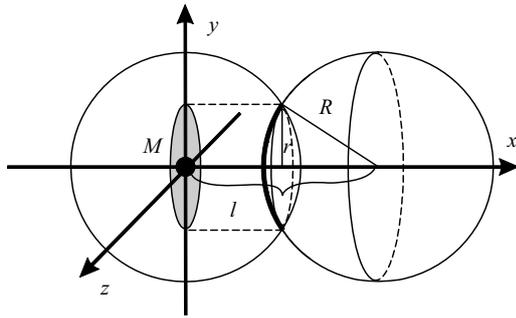


Рис. 2. Модель взаимодействия

Уравнение сферы имеет вид

$$(x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2, R^2 = \frac{l^2}{4} + r^2.$$

Отсюда

$$x = l - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}.$$

Здесь перед корнем мы выбираем знак «минус», что обусловлено выбором расположения системы координат.

Пусть по поверхности как бы размазана бесконечно тонким слоем притягивающая масса (или заряд), будем полагать, что поверхностная плотность постоянна. Тогда сила взаимодействия определяется следующим образом:

$$F = -\gamma \iint_{\Sigma} \frac{l - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}{\left( \left( l - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} d\sigma.$$

Найдем элемент поверхности  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dydz = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} dydz.$$

Тогда получим

$$F = -\gamma \iint_G \frac{l - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}{\left( \left( l - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} dydz.$$

Здесь  $G$  – проекция поверхности на плоскость  $Oxy$ . Введем полярные координаты  $y = \rho \cos \varphi$ ,  $z = \rho \sin \varphi$ , тогда

$$F = -\gamma R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{l - \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\left( l^2 + R^2 - 2l\sqrt{R^2 - \rho^2} \right)^{3/2}} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho.$$

Для того чтобы вычислить данный интеграл, введем замену переменных:

$$t = -2l\sqrt{R^2 - \rho^2}, dt = \frac{2l\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}, \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{dt}{2l},$$

при этом

$$t_0 = -2lR, t_1 = -2l\sqrt{R^2 - r^2} = -l^2.$$

Далее получим

$$F = -\gamma 2\pi R \int_{-2lR}^{-l^2} \frac{l - \left( -\frac{t}{2l} \right)}{\left( l^2 + R^2 + t \right)^{3/2}} \frac{dt}{2l} = -\gamma \pi R \int_{-2lR}^{-l^2} \frac{dt}{\left( l^2 + R^2 + t \right)^{3/2}} - \gamma \pi \frac{R}{2l^2} \int_{-2lR}^{-l^2} \frac{tdt}{\left( l^2 + R^2 + t \right)^{3/2}}.$$

В результате имеем следующие интегралы:

$$F = -\gamma \pi R \left( \left( 1 - \frac{l^2 + R^2}{2l^2} \right) \times \int_{-2lR}^{-l^2} \frac{dt}{\left( l^2 + R^2 + t \right)^{3/2}} + \frac{1}{2l^2} \int_{-2lR}^{-l^2} \frac{dt}{\left( l^2 + R^2 + t \right)^{1/2}} \right).$$

Теперь интегралы легко вычисляются, и в результате алгебраических преобразований получим выражение

$$F = -\frac{\gamma \pi R}{l^2} \left( \frac{R^2 - l^2}{R} - \frac{R^2 - l^2}{|l - R|} + R - |l - R| \right) = -\frac{\gamma \pi R (R^2 - l^2)}{l^2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{|l - R|} \right) - \frac{\gamma \pi R}{l^2} (R - |l - R|).$$

В результате получили достаточно простую формулу, которую не сложно проанализировать.

Рассмотрим различные случаи. Если  $l > R$ , то

$$F = -\frac{4\gamma \pi R^2}{l^2} + \pi \gamma.$$

Из этой формулы следует, что сила взаимодействия зависит только от отношения  $R/l$ . Если  $R = l/2$ , то взаимопроникновения нет, в этом случае согласно модели сила равна нулю. Очевидно, что при  $l \gg R$ , сила взаимодействия также равна нулю.

Из полученного выражения видно, что сила взаимодействия, а значит, типы решеток, образованных неоднородными сферическими телами по правилу взаимопроникновения, зависит от соотношения размеров области взаимопроникновения и радиуса сферы.

### Библиографические ссылки

1. Возмищева Т. Г. Обобщение задачи двух центров в искривленном пространстве // Третья Российская университетско-академическая научно-практическая конференция : тезисы докладов. – Ижевск, 1997. – С. 23.

2. *Возмищева Т. Г.* Классификация движений для обобщения задачи Эйлера на сферу // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 1998. – С. 34-40.

3. *Vozmishcheva T. G., Oshemkov A.* Topological analysis of the two-centre problem on the two-dimensional sphere // Sbornik: Mathematics. – 2002. – Vol. 193. – No. 7-8. – Pp. 1103–1138.

4. *Дубошин А. Г.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М. : Наука, 1964. – 560 с.

5. *Титоров Д. Б.* Моделирование кристаллических структур из сферических тел с взаимно проникающими оболочками // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2003. – № 6. – С. 100–105.

6. *Титоров Д. Б.* Формирование плоских и пространственных структур из сферических тел с взаимно проникающими оболочками // Кристаллография. – 2001. – Т. 46, № 1. – С. 100–105.

Получено 01.10.2015