

УДК 534.1 + 517.9

А. Е. Калинин, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова
Н. П. Кузнецов, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Введение

Колебания механической системы называются параметрическими в том случае, когда динамическое поведение рассматриваемой конструкции характеризуется дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами [1, 2]. В отличие от обычных вынужденных колебаний под действием гармонической внешней нагрузки в случае параметрических колебаний при некоторых соотношениях между параметрами механической конструкции, частотой свободных колебаний конструкции и параметрами изменения внешней нагрузки начальная форма конструкции становится неустойчивой. При характерном соотношении указанных частот и параметров системы в ней возникает так называемый параметрический резонанс, при котором амплитуда колебаний быстро возрастает со временем до больших значений.

Постановка задачи

В качестве примера рассмотрим прямой стержень прямоугольного поперечного сечения, который на левом конце имеет шарнирно-неподвижную опору, а на правом конце – шарнирно-подвижную опору (рис. 1).

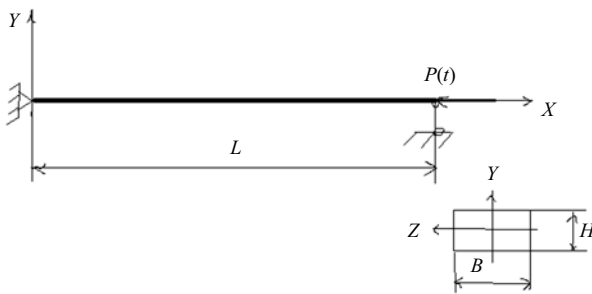


Рис. 1. Схема стержня

На правом конце стержень нагружен продольной переменной во времени сжимающей силой $P_{(t)} = P_0 + P_1 \cdot \sin(\text{OMEGA} \cdot t)$, где P_0 – среднее значение силы; P_1 – амплитуда силы; OMEGA – частота изменения силы; t – время.

Размеры стержня: длина $L = 1,5$ м; ширина поперечного сечения $B = 0,01$ м; высота $H = 0,008$ м. Материал стержня – сталь (модуль Юнга $E = 2e11$ Па; коэффициент Пуассона $\text{Nu} = 0,3$; плотность $\text{RO} = 7850$ кг/м³).

Традиционно в имеющейся литературе [3] по параметрическим колебаниям прямого стержня, нагруженного продольной гармонической силой, решение сводится к исследованию следующего дифференциального уравнения:

$$EI = \frac{\partial^4 V(X, t)}{\partial X^4} + m \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial X^2} = 0,$$

где $V(X, t)$ – прогиб стержня; $P(t)$ – внешняя продольная периодически изменяющаяся во времени сила; EI – изгибная жесткость стержня; m – его погонная масса.

Это уравнение после некоторых математических преобразований сводится к уравнению Хилла или уравнению Матье, на основе которых определяются области динамической неустойчивости конкретного рассматриваемого стержня.

Такой подход к анализу параметрических колебаний становится чрезвычайно сложным (а иногда и невозможным) при рассмотрении параметрических колебаний сложных конструкций, нагруженных сложной системой гармонических внешних нагрузок.

Ниже представлено решение аналогичной задачи численным методом конечных элементов [4] с помощью программы Ansys [5], которая используется в интерактивном режиме.

Вначале выполняем установочные операции: задаем имя директории, в которой будут храниться все файлы, создаваемые при решении задачи; задаем имя выполняемой работы и заголовков задачи; выбираем систему единиц измерения (SI).

Построение модели стержня

Задаем параметры исследуемого стержня: **Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters**. Для рассматриваемого стержня нужно ввести следующие параметры:

L = 1.5	! длина
B = 0.01	! ширина поперечного сечения
H = 0.008	! высота сечения
A = B*H	! площадь сечения
JZ = B*(H**3)/12	! момент инерции сечения
E = 2e11	! модуль упругости материала
Nu = 0.3	! коэффициент Пуассона
RO = 7850	! плотность материала
n_fe = 15	! число конечных элементов в стержне

1. Выбираем тип элемента: Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete... В появившемся окне *Library of Element Types* выбираем элемент BEAM3 (Beam 2D elastic), который имеет 3 степени свободы (перемещения вдоль осей X и Y и поворот вокруг оси Z).

2. Задаем вещественные константы элемента: Main Menu > Preprocessor > Real Constants... > Add... В появившемся окне Real Constants for BEAM3 вводим следующие геометрические параметры: Cross-sectional area AREA: A ; Area Moment of Inertia IZZ: JZ ; Total beam height HEIGHT: H .

В результате этих действий будет задан элемент с прямоугольным поперечным сечением размером $0,01 \times 0,008$ м.

3. Создаем ключевые точки на обоих концах стержня: Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Keypoints > In Active CS.

№ ключевой точки	X , [м]	Y , [м]
1	0	0
2	L	0

4. Создаем прямую линию: Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Lines > Lines > Straight Line. Создаем линию между ключевыми точками 1 и 2.

5. Задаем константы упругости материала: Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Isotropic. В появившемся окне в соответствующие поля вводим константы упругости стали: модуль Юнга $E_X = E$ и коэффициент Пуассона $PRXY = \nu$.

Задаем плотность материала: Material Model Number 1 > Structural > Density. В появившемся окне вводим ρ в поле DENS.

6. Задаем геометрические граничные условия: Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Keypoints.

При появлении на экране окна **Apply U, ROT on KP's** выбираем ключевую точку **1** в графическом окне > **Apply**. Затем в окне **Apply U, ROT on KP's** выбираем запрещенные степени свободы в точке **1**, т. е. UX и UY. После выбора операции **Apply** на экране появляются символы ограничения указанных степеней свободы в ключевой точке **1**.

Теперь выбираем ключевую точку **2** на правом конце стержня > **Apply**. Появляется снова окно **Apply U, ROT on KP's**. В правой части этого окна выбираем перемещение UY. Выбираем операцию **Apply**, и на экране появляются символы ограничения вертикальных перемещений в ключевой точке **2**.

7. Задаем размер конечного элемента: Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrl > Manual Size > Lines > All Lines... Для данного примера зададим 15 элементов вдоль оси стержня: вводим n_{fe} в поле **NDIV No. of element divisions**.

8. Разделяем стержень на конечные элементы: Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Lines > выбираем опцию Pick All.

Строим на экране изображение узлов: **Utility Menu -> Plot -> Nodes**. При желании включаем нуме-

рацию узлов: **Utility Menu -> Plot Controls -> Numbering...** Для **NODE Node Numbers** выбираем **ON**.

9. Сохраняем выполненную работу: Utility Menu > File > Save As...

Определение собственных частот стержня

1. Выбираем модальный тип расчета: Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis. В окне New Analysis выбираем модальный расчет: Modal.

2. Задаем опции модального расчета: Main Menu > Solution > Analysis Type > Analysis Options. В появившемся диалоговом окне нужно выбрать метод **Subspace** и ввести **2** в поле No. of modes to extract. Активируем опцию Expand mode shapes и вводим **2** в поле No. of modes to expand. В появившемся диалоговом окне для решения нашего примера будем использовать опции по умолчанию, поэтому теперь нужно выбрать OK.

3. Решаем уравнения модального расчета: Main Menu > Solution > Solve > Current LS.

4. Просмотр результатов модального расчета

4.1. Получить список собственных частот: Main Menu > General Postproc > Results Summary... Появляется список собственных частот в Гц:

```
SET          TIME/FREQ
1            8,1379
2           32,551
```

Значение частоты основного (первого) тона $FREQ1 = 8,1379$ Гц.

Значение частоты второго тона $FREQ2 = 32,551$ Гц.

В этом списке приведены значения технических частот; для перехода к круговым частотам ω эти значения нужно умножить на 2π : $\omega_1 = 51,1$ 1/сек., $\omega_2 = 204,4$ 1/сек.

Присвоить значение частоты основного тона переменной $FREQ_1$: в командную строку вводим ***GET,FREQ_1,MODE,1,FREQ_1**.

Примечание: для получения большей точности определения частот нужно сделать сетку более мелкой (т. е. вместо 15 элементов нужно разбить стержень на 20 или более элементов в зависимости от выбранной величины повышенной точности).

4.2. Просмотр форм свободных колебаний стержня (этот этап расчета не является обязательным!).

4.2.1. *Выбрать результаты для первой формы колебаний*: Main Menu > General Postproc > Read Results > First Set

4.2.2. *Построить изображение первой формы колебаний*: Main Menu > General Postproc > Plot Results > Deformed shape. Выбрать Def + undef edge. На экране появляется изображение первой формы колебаний стержня.

4.2.3. *При желании можно выполнить просмотр следующей формы колебаний*: Main Menu > General Postproc > Read Results > Next Set. Теперь нужно выбрать Main Menu > General Postproc > Plot Results > Deformed shape. Затем выбрать Def + undef edge.

Динамический расчет стержня

1. Входим в препроцессор: Main Menu > Preprocessor и вводим с помощью командной строки следующие параметры динамического расчета:

$P_i = 4 * \text{ATAN}(1)$
 $w = 2 * \pi * \text{FREQ}_1$! частота основного тона колебаний стержня (1/сек.);
 $Q = 0.2 * w$! частота изменения силы $P(t)$ (1/сек.);
 $P_0 = -5000$! среднее значение этой силы (H);
 $P_1 = 500$! амплитуда изменения этой силы;
 $N = 400$! число шагов нагружения;
 $n_FX = \text{NODE}(L,0,0)$! номер узла, к которому приложена сила $P(t)$.

2. Выбираем вид расчета, т. е. нестационарное нагружение и полный анализ:

Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis. В появившемся окне выбираем опции **Transient** и **Full**.

3. Выбираем решение методом Ньюмарка и задаем параметры численного интегрирования: **Main Menu > Solution > [Unabridgen Menu] > Load Step Opts > Time/Frequenc > Time Integration > Newmark Parameters > [TIMINT] (Вкл.) > [TINTP] > [ALPHA] = [0.25250625]; [DELTA] = [0.505] > ОК.**

4. Задаем опции вывода результатов расчета.

4.1. Печатать результаты на каждом шаге: **Main Menu > Solution > Load Step Opts > Output Ctrl's > Solu Printout > [OUTPR] = [Every substep] > ОК.**

4.2. Вывод результатов на каждом шаге: **Main Menu > Solution > Load Step Opts > Output Ctrl's > Db/Results File > [OUTRES] = [Every substep] > ОК.**

5. Задаем наклонное нагружение: открываем панель **Transient** и в ней выбираем опцию **Ramped Loading**.

6. Задаем начальные условия во всех узлах стержня (ALL для степени свободы UY – начальные перемещения = 0 и начальная скорость = 0,005:

Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Initial Condit'n > Define > [IC]; [Lab] = [UY]; [VALUE]= 0; [VALUE2] = 0.005 > ОК.

7. Выполняем цикл по шагам нагружения (этот этап расчета можно выполнить только в командном режиме работы с программой ANSYS!):

```

*DO,I_STEP,1,N,1
AUTOTS,0
TIME,I_STEP/20
PT=P0+P1*SIN(Q*(I_STEP/20))
F,n_FX,FX,PT
SOLVE
*ENDDO
    
```

Конец расчета Close.

Просмотр результатов динамического расчета

Для просмотра вертикального перемещения UY некоторого узла стержня во времени следует использовать **Time Hist PostProcessor (POST26)**.

– Выбрать **TimeHist Postpro > Variable Viewer...**

В появившемся окне выбираем операцию **Add**. Во вновь появившемся окне выбираем **Nodal Solution > DOF Solution > Y-Component of displacement**.

– Графически выбираем узел с координатой $x = L/2$. В окне **Time History Variables** появляется строка с выбранным перемещением UY_2.

Строим график зависимости UY_2 от времени: в окне **Time History Variables** выбираем операцию **Plot**. После этого появляется такой график на экране монитора (рис. 2).

Из полученного графика видно, что колебания стержня со временем уменьшаются.

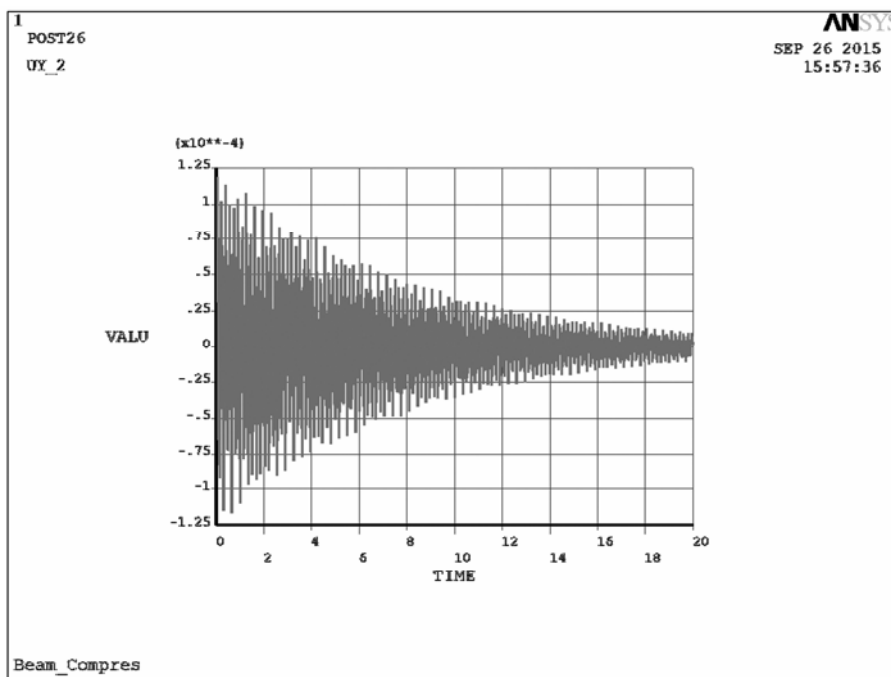


Рис. 2. График изменения во времени вертикального перемещения точки стержня с координатой $x = L/2$ (при $Q = 0,2w$)

При желании можно получить список значений UY_2 на каждом шаге нагружения: в окне Time History Variables выбираем операцию List. Появляется таблица значений UY_2 .

С помощью отредактированного командного файла, который был создан программой после завершения этапа 7 динамического расчета, можно выполнить анализ параметрических колебаний аналогичного стержня с другой геометрией при других условиях его закрепления и нагружения.

Заключение

Изложенный метод работоспособен при анализе параметрических колебаний сложных стержневых конструкций (рамы, фермы и т. п.), пластин, оболочек и комбинированных конструкций.

Получено 02.11.15

Библиографические ссылки

1. Шмитд Г. Параметрические колебания. – М. : Мир, 1978. – 336 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания : справочник : в 3 т. – Т. 3. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М. : Физматлит, 1958. – 408 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
5. Чигарев А. В., Кравчук А. С., Смаляк А. Ф. ANSYS для инженеров : справ. пособие. – М. : Машиностроение, 2004. – 512 с.

УДК 539.374 ; 620.178.3

Д. С. Добровольский, магистрант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ В УСЛОВИЯХ МЕЛКИХ И ГЛУБОКИХ ТРЕЩИН

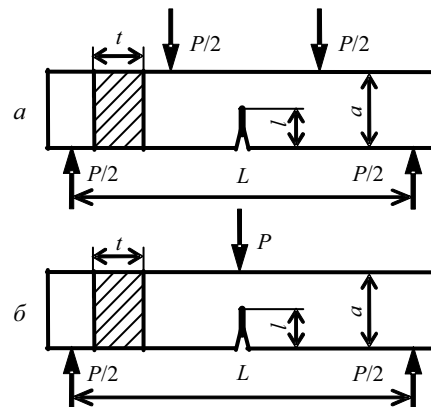
Использование высокопрочных материалов пониженной пластичности, распространение сварки вместо клепки, освоение северных территорий, развитие криогенной техники, повышение рабочих характеристик конструкций (скоростей нагружения, давлений, агрессивности сред) выдвинули в число важнейших проблему повышения трещиностойкости (вязкости разрушения) материалов и элементов конструкций. При силовой трактовке разрушения трещиностойкость элементов конструкций прогнозируют, сопоставляя расчетные K_1 и экспериментально определяемые критические K_{1c} КИН ($K_1 \ll K_{1c}$).

Экспериментальное определение характеристик трещиностойкости материалов проводится в соответствии с методикой [1] на образцах с предварительно выращенными мелкими ($\approx 1 \dots 2$ мм) трещинами. Для более надежного прогнозирования работоспособности конструкций вязкость разрушения целесообразно определять в широком диапазоне размеров трещин, наблюдаемых при эксплуатации соответствующих конструкций. Вместе с тем такая методика нуждается в теоретическом обосновании. В связи с этим в данной работе предлагаются соотношения для определения расчетных и критических КИН в условиях трещин произвольных размеров при чистом (четырёхточечном) и поперечном (трехточечном) изгибах (рисунок).

При изгибе балки с мелким V -образным надрезом для коэффициента концентрации напряжений рекомендуется зависимость [2, с. 71]

$$\alpha_\sigma = 1 + 2\sqrt{l/\rho}, \quad (1)$$

где l – глубина надреза; ρ – радиус кривизны в его вершине.



Схемы нагружения при оценке трещиностойкости в условиях чистого (четырёхточечного) изгиба (а) и поперечного (трехточечного) изгиба (б)

С учетом (1) аналогично [3, с. 118] можно представить КИН при чистом изгибе (см. рис. а) моментом M испытываемого образца с предельно мелкой ($l \rightarrow 0$, $\lambda = l/a \rightarrow 0$) трещиной как предельно острым ($l/\rho \rightarrow \infty$) надрезом:

$$K_{1m.n} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (0,5\sigma_n \alpha_\sigma \sqrt{\pi\rho}) = \sigma_n \sqrt{\pi l}, \quad (2)$$