МАТЕМАТИКА

УДК 532.529, 519.63

М. М. Горохов, доктор физико-математических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова
А. В. Корепанов, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова»
В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОСАЖДЕНИИ ЧАСТИЦ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ МАССОВОЙ СИЛЫ

Двухфазное течение в энергоустановках часто имеет трехмерную структуру. Трехмерные эффекты проявляются, когда на движение конденсированной фазы влияет массовая сила, направление которой не совпадает с осевой координатой.

Принятые обозначения

x, y, ε – осевая, радиальная и угловая координаты; a_x, a_r, a_ε – составляющие вектора перегрузок; $\xi(x, y), \eta(x, y)$ – преобразованные криволинейные координаты; u, v, w – составляющие вектора скорости в направлениях x, y, ε; U, V – контрвариантные составляющие вектора скорости в направлениях ξ, η; $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta, D$ – метрические коэффициенты и якобиан преобразования координат; ρ, p, T – плотность, давление и температура; μ – коэффициент динамической вязкости газа; g – ускорение свободного падения; n – число частиц в единице объема; m – масса частицы; r – радиус частицы; A, A_T – коэффициенты сопротивления и теплообмена; s – индекс номера фракции частиц.

Основные допущения

1. При расчете двухфазного течения продуктов сгорания параметры газовой и конденсированной фаз определяются раздельно. Сначала рассчитывается поле течения газа, а затем – поле течения конденсированных частиц. Обратное влияние частиц на газ не учитывается, так как скоростная неравновесность фаз в камере сгорания небольшая.

2. Движение газовой фазы описывается уравнениями для несжимаемой вязкой жидкости с постоянной вязкостью. Число Маха в камере сгорания, как правило, не превышает 0,1, и эффекты сжимаемости можно не учитывать. Крупномасштабная структура потока в камере сгорания, как показали методические расчеты, удовлетворительно описывается моделью течения с постоянной вязкостью и слабо зависит от учета какой-либо модели вязкости. В камере сгорания очень сложно достичь разрешения сетки, пригодного для расчета течений с высокими числами Рейнольдса.

3. Температура газа принимается равной равновесной температуре продуктов сгорания, так как ее изменение по объему камеры сгорания не превышает 1 %.

4. Конденсированная фаза состоит из полидисперсных частиц, разбитых на две группы фракций. Первая группа – частицы оксида алюминия размером 0,1…20 микрон, образовавшиеся в результате сгорания исходных частиц алюминия и агломератов. Вторая группа – частицы, состоящие из алюминия и его оксида (агломераты) и горящие при движении в потоке продуктов сгорания.

5. Описание взаимодействия фракций частиц основано на непрерывной модели и на экспериментальных значениях коэффициента эффективности коагуляции.

6. Для расчета скорости горения агломератов используются эмпирические формулы.

Уравнения газовой фазы

Уравнения движения газа [1], записанные в криволинейной системе координат, имеют вид

$$\left(yD\rho U\right)_\xi + \left(yD\rho V\right)_\eta = 0,$$

$$\left(yD\rho Uu\right)_\xi + \left(yD\rho Vu\right)_\eta =$$

$$= -y\left(p_\xi x_\xi - p_\eta y_\xi\right) + y\mu\left[\left(yu_\xi\right)_\xi + \left(yu_\eta\right)_\eta\right],$$

$$\left(yD\rho Uv\right)_\xi + \left(yD\rho Vv\right)_\eta =$$

$$= -y\left(p_\xi y_\xi + p_\eta x_\xi\right) + y\mu\left[\left(yv_\xi\right)_\xi + \left(yv_\eta\right)_\eta - \frac{D}{y^2}v\right],$$

$$U = u\xi_x + v\xi_y,\ V = u\eta_x + v\eta_y,\ D = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi,$$

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{D},\ \xi_y = -\frac{x_\eta}{D},\ \eta_x = -\frac{y_\xi}{D},\ \eta_y = \frac{x_\xi}{D}.$$

На непроницаемых участках границы ставятся условия прилипания, на участках вдува – параметры вдува, на оси симметрии – условия симметрии, на выходной границе фиксируется давление.

Уравнения дисперсной фазы [2]

Уравнения движения в характеристической форме имеют вид

$$\frac{du_s}{dt} = A_s\left(u - u_s\right) + q_{us} + a_x g,$$

$$\frac{dv_s}{dt} = A_s\left(v - v_s\right) + q_{vs} + a_r g + \frac{w_s^2}{y}, \qquad (1)$$

$$\frac{dw_s}{dt} = A_s\left(w - w_s\right) + q_{ws} + a_\varepsilon g - \frac{v_s w_s}{y},$$

$$\frac{d}{dt} = U_s \frac{\partial}{\partial \xi} + V_s \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{w_s}{y} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Уравнения для характеристик:

$$\frac{d\xi}{dt} = U_s, \; \frac{d\eta}{dt} = V_s, \; \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{w_s}{y}.$$

Уравнение для изменения масс частиц при взаимодействиях друг с другом и при горении:

$$\frac{dm_s}{dt} = q_{ms} + G_s. \qquad (2)$$

Уравнение, описывающее изменение числа частиц в единице объема, записано в дивергентном виде:

$$\left(yDn_sU_s\right)_\xi + \left(yDn_sV_s\right)_\eta + D\left(n_sw_s\right)_\varepsilon = yD\left(q_{ns} + q_{Gs}\right). \qquad (3)$$

Члены $q_{us}, q_{vs}, q_{ws}, q_{Ts}, q_{ms}, q_{ns}, q_{Gs}$, учитывающие обмен массой, количеством движения и энергией при столкновениях частиц, определяются в соответствии с работой [3]. Массовая скорость горения частиц определяется выражением вида $G_s = -3m_s \big/ \left(\alpha\beta(2r_s)^\alpha\right)$. Коэффициенты α, β определяются экспериментально. Изменение числа частиц высокодисперсных фракций при горении частиц крупных фракций определяется соотношением

$$q_{Gs} = -\frac{g_r r_s}{m_s}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r_{L_1}}\right)^{1/L_1}\right] \sum_{k=L_1+1}^{L} G_k n_k.$$

При выводе этого выражения предполагается, что распределение частиц имеет бимодальный характер. Левая часть распределения содержит высокодисперсные негорящие частицы и разбита на $L_1 + 1$ фракцию $\left(s = 0, 1, ..., L_1\right)$. Правая часть распределения содержит крупные горящие частицы и разбита на фракции $s = L_1 + 1, ..., L.$ q_r – функция плотности массового распределения частиц по нормально-логарифмическому закону.

Численный метод решения уравнений

Для расчета применяется осесимметричная криволинейная ортогональная сетка. Сетка в плоскости $\varepsilon = \text{const}$ строится с помощью комплексного метода граничных элементов. Уравнения движения газа решаются с помощью метода SIMPLE, реализованного для криволинейной ортогональной системы координат.

Для расчета движения частиц применяется метод контрольного объема, неявный по правым частям уравнений (4) и (6). Уравнения (1)–(3) представим в виде

$$\frac{d\vec{\mathbf{f}}_s}{dt} = -\mathbf{C}_s\vec{\mathbf{f}}_s + \mathbf{B}_s, \qquad (4)$$

$$\left(yDN_sU_s\right)_\xi + \left(yDN_sV_s\right)_\eta + D\left(N_sw_s\right)_\varepsilon = 0, \qquad (5)$$

где $\vec{\mathbf{f}}_s = \left(u, v, w, T, m, \psi\right)_s$; ψ_s – функция, учитывающая изменение числа частиц в единице объема в результате взаимодействия фракций и горения частиц и определяемая соотношением $n_s = \psi_s N_s$; N_s – число частиц, определяемое только скоростным отставанием частиц от газа; коэффициенты $\mathbf{C}_s, \mathbf{B}_s$ включают соответствующие величины из уравнений (1)–(3).

Уравнение (5) для N также представим в характеристической форме:

$$\frac{dN}{dt} = -N\frac{\left(yDU_s\right)_\xi + \left(yDV_s\right)_\eta + D\left(w_s\right)_\varepsilon}{yD},$$

или

$$\frac{d\left(\ln\left(N\right)\right)}{dt} = -\frac{\left(yDU_s\right)_\xi + \left(yDV_s\right)_\eta + D\left(w_s\right)_\varepsilon}{yD}. \qquad (6)$$

Пусть разностная сетка имеет нумерацию узлов $i, j, k,$ соответственно, в направлениях $\xi, \eta, \varepsilon.$ Дискретный аналог уравнений (4), (6) получается с помощью интегрирования по ячейке i, j, k:

$$a_{i,j,k} f_{i,j,k} = a_{Wi,j,k} f_{i-1,j,k} + a_{Ei,j,k} f_{i+1,j,k} + a_{Ni,j,k} f_{i,j+1,k} + \\ + a_{Si,j,k} f_{i,j-1,k} + a_{Ri,j,k} f_{i,j,k+1} + a_{Li,j,k} f_{i,j,k-1} + b_{i,j,k}. \qquad (7)$$

Разностные коэффициенты в системе уравнений (7) имеют вид (индекс принадлежности к фракции s опускаем)

$$a_{Wi,j,k} = \max\left(U_{i-1,j,k}, 0\right)\Delta\eta_j\Delta\varepsilon_k,$$
$$a_{Ei,j,k} = \max\left(-U_{i,j,k}, 0\right)\Delta\eta_j\Delta\varepsilon_k,$$
$$a_{Si,j,k} = \max\left(V_{i,j-1,k}, 0\right)\Delta\xi_i\Delta\varepsilon_k,$$
$$a_{Ni,j,k} = \max\left(-V_{i,j,k}, 0\right)\Delta\xi_i\Delta\varepsilon_k,$$
$$a_{Li,j,k} = \max\left(w_{i,j,k-1} / y_{i,j,k}, 0\right)\Delta\xi_i\Delta\eta_j,$$
$$a_{Ri,j,k} = \max\left(-w_{i,j,k} / y_{i,j,k}, 0\right)\Delta\xi_i\Delta\eta_j,$$
$$a_{i,j,k} = a_{Wi,j,k} + a_{Ei,j,k} + a_{Si,j,k} + a_{Ni,j,k} + \\ + a_{Ri,j,k} + a_{Li,j,k} + A\Delta\xi_i\Delta\eta_j\Delta_k.$$

При решении уравнений движения газовой фазы применяется «шахматная» разностная сетка. В результате продольная контрвариантная составляющая скорости U определяется на боковых гранях ячейки, а поперечная контрвариантная составляющая V – на верхней и нижней гранях. Параметры частиц, в частности составляющие скорости $u, v,$ определяются в центре ячейки. Для определения контрвариантных составляющих скорости частиц U_s, V_s на гранях ячейки определяются разности скоростей $\Delta U_0 = \left(U - U_s\right)_0, \Delta V_0 = \left(V - V_s\right)_0$ в центрах ячеек. Затем эти разности интерполируются в соответствующие грани ячеек. По этим разностям и известным значениям контрвариантных скоростей газа определяются контрвариантные скорости частиц.

Коэффициенты $b_{i,j,k}$ составлены из свободных членов уравнений (4), (6). Разностные уравнения (7) решаются итерационным блочным методом Зейделя с применением прогонки в направлении i и с использованием нижней релаксации.

Библиографические ссылки

1. *Ковеня В. М.*, *Тарнавский Г. А.*, *Черный С. Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. – Новосибирск : Наука, 1990. – 245 с.
2. Газовая динамика двухфазных течений в соплах / И. М. Васенин, В. А. Архипов, В. Г. Бутов [и др.]. – Томск : ТГУ, 1986. – 264 с.
3. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М. : Энергоиздат, 1984. – 150 с.

Получено 04.02.2016

УДК 519.63:629.7

О. В. Мищенкова, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КАК ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОБЪЕКТОВ ТЕХНИКИ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ

При выполнении проектных работ, связанных с созданием новых технических объектов, возникает необходимость выбора единственного варианта решения из того или иного множества возможных решений. Подобные задачи, именуемые задачами выбора, – это, например, прямые и обратные задачи проектирования, в которых выбирается совокупность геометрических и массовых параметров проектируемого объекта в соответствии со сформулированным техническим заданием. В [1–3] отмечается, что решение задач выбора, возникающих в технике, сводится к формулированию в виде математических соотношений критериев выбора и ряда условий, при которых этот выбор должен быть осуществлен. Ниже рассматриваются примеры подобных задач, возникающих на практике.

1. Задача о выборе тяги двухрежимного ракетного двигателя твердого топлива (РДТТ), обеспечивающей максимальную дальность полета неуправляемого реактивного снаряда (НУРС).

В задаче для НУРС заданной пассивной массы m_0 и заданной массы топлива $m_\text{т}$ следует выбрать начальный угол бросания θ_0, при котором дальность полета L снаряда будет максимальной [4]. Тяга двигательной установки выбирается по закону

$$P = \begin{cases} P_1 & \text{при } 0 \le t < t_1, \\ 0 & \text{при } t_1 \le t < t_2, \\ P_2 & \text{при } t_2 \le t < t_3. \end{cases}$$

В записанном выражении для закона изменения тяги неизвестными являются уровни тяги P_1, P_2 и моменты времени t_1, t_2, t_3.

Дополнительным условием, связывающим перечисленные неизвестные, является уравнение

$$P_1 t_1 + P_2 (t_3 - t_2) = m_\text{т} I_\text{уд}.$$

В соответствии с [5] задачу о выборе тяги РДТТ для НУРС можно переформулировать как задачу математического программирования: найти значения переменных θ_0, P_1, P_2, t_1, t_2, t_3, обеспечивающих максимальное значение дальности полета $\max L(\theta_0, P_1, P_2, t_1, t_2, t_3)$ при ограничениях на неизвестные параметры, записанные в виде

$$\begin{gathered} t_1 > 0, \\ t_2 - t_1 \ge 0, \\ t_3 - t_2 \ge 0, \\ P_1 t_1 + P_2 (t_3 - t_2) - m_\text{т} I_\text{уд} = 0. \end{gathered}$$

Дальность полета в сформулированной задаче – целевая функция, значение которой устанавливается решением уравнений внешней баллистики для НУРС. В простейшем случае это уравнения, записанные для движения материальной точки в декартовой системе координат (здесь дополнительно обозначены: X – сила аэродинамического сопротивления; $I_\text{уд}$ – удельный импульс твердого топлива):

$$\begin{gathered} m\frac{dv}{dt} = P - X - mg\sin\theta, \\ mv\frac{d\theta}{dt} = -mg\cos\theta, \\ \frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \\ \frac{dy}{dt} = v\sin\theta, \\ \frac{dm}{dt} = \frac{P}{I_\text{уд}}. \end{gathered}$$

Уравнения внешней баллистики решаются при начальных условиях