

соким прогностическим индексом, предотвращая реализацию негативного прогноза.

Библиографические ссылки

1. Наумов О. Ю., Лузин П. М. Методологический подход к прогнозированию заболеваемости ВИЧ-инфекцией на территории Пермской области // Актуальные вопросы ВИЧ-инфекции на Урале. – Екатеринбург, 1995. – С. 45–48.

2. Троценко О. Е., Старостина И. С., Богач В. В. Клинико-лабораторные критерии прогрессирования ВИЧ-инфекции среди лиц из мест лишения свободы. – Хабаровск, 2004. – 49 с.

3. Пат. на изобретение RU 2444299 от 10.03.2012. Способ прогнозирования варианта течения ВИЧ-инфекции у детей / В. Б. Денисенко, Э. М. Симованьян.

4. Пат. на изобретение RU 2454941 от 10.07.2012. Способ прогнозирования варианта течения ВИЧ-инфекции у детей / Э. М. Симованьян, В. Б. Денисенко.

Получено 06.05.2016

5. Пат. на изобретение RU 2306566 от 20.09.2007. Способ прогноза быстрого прогрессирования заболевания у больных ВИЧ-инфекцией / Ю. М. Амбалов, Л. П. Сизякина, С. Д. Перепечай.

6. Пат. на изобретение RU 2297787 от 27.04.2007. Способ прогнозирования уровня заболеваемости ВИЧ-инфекцией в регионе / В. В. Табаков, В. В. Никитин.

7. Жевагина Н. А., Железнякова Л. А. Особенности течения сочетанной инфекции ВИЧ и туберкулеза у больных в пенитенциарной системе // Пенитенциарная медицина: история, современное состояние и перспективы развития: сб. материалов конф., посвященной 10-летию филиала (г. Ижевск) ФКУ НИИ ФСИН России (5 сентября 2015 г.). – С. 88–90.

8. Пономарев С. Б., Лецинский Л. А., Русяк И. Г. Очерки прогнозирования в кардиологии. – Ижевск, 2000. – 192 с.

9. Курлов М. Г. Клинические лекции по внутренним болезням. – Томск, 1927. – 201 с.

УДК 519.63 : 629.7

О. В. Мищенко, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЫБОРА ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОЦЕССОВ В ТВЕРДОТОПЛИВНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Задачи выбора часто встречаются в технических приложениях. В частности, постановка технической задачи как задачи выбора может применяться при решении обратных задач проектирования, в которых имеется необходимость выбора геометрии и других параметров технического объекта в соответствии с имеющимся техническим заданием. Другой пример – выбор недостающей в математической модели процессов информации по косвенным данным,

например, по результатам экспериментов. В [1–4] приводятся примеры формулировки задач выбора применительно к летательной технике. Ниже приводятся методы решения задач выбора на примере математической модели внутрикамерных процессов в твердотопливном двигателе.

Для твердотопливного двигателя, конструктивная схема которого представлена на рис. 1, рассмотрим задачу о начальном этапе его работы.

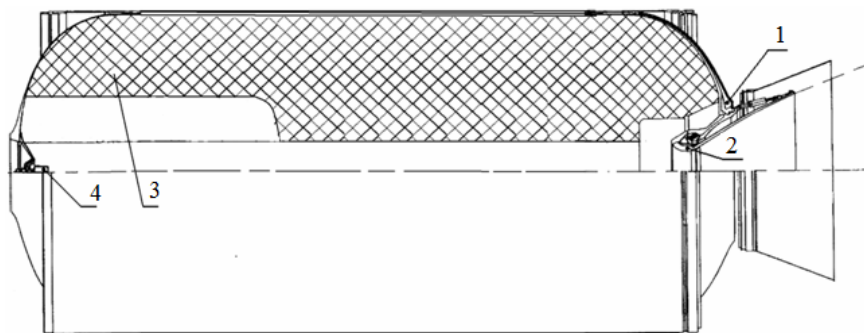


Рис. 1. Конструктивная схема ДУ с зарядом канального типа:

1 – корпус ДУ; 2 – сопловой блок; 3 – топливный заряд; 4 – инициирующее устройство

В отличие от [5] задача о выходе двигательной установки на квазистационарный режим должна быть решена по крайней мере в одномерной постановке, что позволило бы установить момент зажигания топливного заряда и скорость распространения пламени по его поверхности, влияние

которых на зависимость давления от времени $p(t)$ в камере двигателя на начальном этапе его работы велика.

В соответствии с [6–8] уравнения внутрикамерных процессов в одномерной нестационарной постановке запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho F v}{\partial x} &= \rho_{\tau} u_{\tau} h_{\tau} \delta; \\
 \frac{\partial \rho F \alpha_{\tau}}{\partial t} + \frac{\partial \rho F \alpha_{\tau} v}{\partial x} &= \rho_{\tau} u_{\tau} h_{\tau} \delta; \\
 \frac{\partial \rho F \alpha_{\text{B}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho F \alpha_{\text{B}} v}{\partial x} &= 0; \\
 \alpha_0 &= 1 - \alpha_{\text{B}} - \alpha_{\tau}; \\
 \frac{\partial \rho F v}{\partial t} + \frac{\partial \rho F v^2}{\partial x} + F \frac{\partial p}{\partial x} &= -\Phi_{\text{тр}} (1 - \delta); \\
 \frac{\partial \rho F E}{\partial t} + \frac{\partial \rho F E (p + \rho v^2)}{\partial x} &= \rho_{\tau} u_{\tau} H_{\tau} h_{\tau} \delta - \Phi_{\text{тр}} v (1 - \delta); \\
 p &= \rho (k - 1) \left(E - \frac{v^2}{2} \right); \\
 c_v &= c_{v\text{B}} \alpha_{\text{B}} + c_{v\tau} \alpha_{\tau} + c_{v0} \alpha_0; \\
 c_p &= c_{p\text{B}} \alpha_{\text{B}} + c_{p\tau} \alpha_{\tau} + c_{p0} \alpha_0; \\
 k &= \frac{c_p}{c_v}; \quad T = \left(E - \frac{v^2}{2} \right) \frac{1}{c_v}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь приняты обозначения: t – текущее время; ρ, E, T, p_k, p_0 – плотность, внутренняя энергия, температура и давление продуктов сгорания, давление окружающей среды; $\alpha_0, \alpha_{\text{B}}, \alpha_{\tau}$ – массовые концентрации воздуха, продуктов горения воспламенительной навески и топлива; H_{B}, H_{τ} – полное теплосодержание продуктов горения воспламенительной навески и твердого топлива; c_p, c_v, R – удельные теплоемкости и газовая постоянная; $u_{\tau}, \Phi_{\text{тр}}$ – скорость горения топлива и потери энергии.

Для определения моментов времени зажигания твердого топлива необходимо решать задачу о прогреве его поверхностного слоя. Задача о зажигании решается в ряде сечений, перпендикулярных к поверхности топливного заряда. В итоге для определения характера прогрева поверхности твердого топлива, последовательности его зажигания требуется решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d(T_i - T_0)^2}{dt} = \frac{2}{c_{\tau} \rho_{\tau} \lambda_{\tau}} |q_i| q_i, \quad i = 1, N. \tag{2}$$

В последнем уравнении и ниже обозначены: N – количество сечений топливного заряда, для которых решается задача о зажигании; T_i, T_0 – соответственно, температура на поверхности топлива и в его непрогретой области; $c_{\tau}, \rho_{\tau}, \lambda_{\tau}$ – удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности топлива; q_i – тепловой поток, поступающий от горячих продуктов сгорания в поверхностный слой топлива; λ – коэффициент теплопроводности продуктов сгорания; Re, Pr – числа Рейнольдса и Прандтля; D – эффективный диаметр для сечения, в кото-

ром рассчитывается зажигание топлива; $T_{\text{восп}}$ – температура воспламенения топлива.

Уравнения (2) решаются до тех пор, пока выполняется условие $T_i < T_{\text{восп}}$. Момент времени τ_{*i} , соответствующий условию $T_i \geq T_{\text{восп}}$, устанавливает начало горения топлива в сечении с номером i .

Тепловой поток определяется по формуле

$$q_i = (T - T_i) \frac{\lambda}{D} A Re^s Pr^f \left(1 + \frac{x}{D} \right)^r. \tag{3}$$

В этом уравнении коэффициенты A, s, f, r устанавливаются из специально подготовленного эксперимента.

Пусть экспериментальная зависимость $p_{\text{экс}}(t)$ известна (для определенности будем считать, что давление измеряется в окрестности переднего днища двигателя или в корпусе воспламенительного устройства). В то же время зависимость $p(t)$ можно установить решением задачи внутренней баллистики, основными из которых являются уравнения (1)–(3). Поставим задачу о выборе коэффициентов A, s, f, r таким образом, чтобы обеспечить максимальное приближение расчетной зависимости $p(t)$ с экспериментальной $p_{\text{экс}}(t)$. Такая формулировка задачи позволяет решать ее как задачу математического программирования [9–11]

установить значения неизвестных переменных A, s, f, r , удовлетворяющих условиям $A_{\text{min}} < A < A_{\text{max}}, s_{\text{min}} < s < s_{\text{max}}, f_{\text{min}} < f < f_{\text{max}}, r_{\text{min}} < r < r_{\text{max}}$ и обеспечивающих минимум целевой функции $\Phi(A, s, f, r)$, определяемой как

$$\min \Phi(A, s, f, r) = \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{|p(t) - p_{\text{экс}}(t)|}{p(t)} \right) dt. \tag{4}$$

Целевая функция может определяться и по другой зависимости:

$$\min \Phi(A, s, f, r) = \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{(p(t) - p_{\text{экс}}(t))^2}{p^2(t)} \right) dt. \tag{5}$$

Решение задачи (4) (или задачи (5)) предполагает многократное вычисление зависимости $p(t)$, входящей в целевую функцию, и это делает решаемую задачу достаточно трудоемкой. В связи с этим принципиальным является выбор численного метода ее решения. Ниже будут рассматриваться три численных метода – Ньютона [12], деформируемого многогранника [13] и генетический [14].

В методе Ньютона (МН) уравнение (4) сводится к решению системы нелинейных уравнений. В [15] метод Ньютона применяется для определения термодинамически равновесного состава продуктов сгорания химического топлива, и при определении очередного приближения для неизвестных величин вместо метода Гаусса используется QR-метод, что существ-

венно повышает надежность вычислительного алгоритма. Такой же алгоритм используется и ниже.

В методе деформируемого многогранника (МДФ) область поиска неизвестных переменных, заключенная в многогранник, число граней которого совпадает с числом неизвестных величин, последовательно сужается. Число итераций при этом пропорционально заданной точности вычисления.

Генетические алгоритмы (ГА) разнообразны, однако ниже используется относительно простой алгоритм [16]. Тем не менее трудоемкость решения задачи (4) с использованием этого метода значительно выше, чем при использовании предыдущих методов (в расчетах использовалось 50 особей в одном поколении, всего рассчитывалось до 80 поколений).

Решение задач (4) и (5) выполнялось при следующих основных исходных данных:

– свободный объем камеры $2,1 \text{ м}^3$;

– площадь поверхности горения топлива $16,2 \text{ м}^2$;

– первоначальное давление в корпусе двигателя $2,0 \text{ МПа}$;

– расчетное давление в камере двигателя $6,65 \text{ МПа}$;

– масса воспламенительной навески 4 кг ;

– температура зажигания топлива 750 К .

Границы изменения поисковых параметров принимались следующими:

$$0,20 < A < 0,50; \quad 0,50 < s < 0,80;$$

$$0,50 < f < 0,80; \quad -0,50 < r < 1,0.$$

Отметим, что в качестве экспериментальной кривой использовалась произвольно заданная тестовая зависимость $p_{\text{эксп}}(t)$ (на рисунках представлена толстой линией).

Результаты выполненных расчетов представлены на рис. 2 и в таблице.

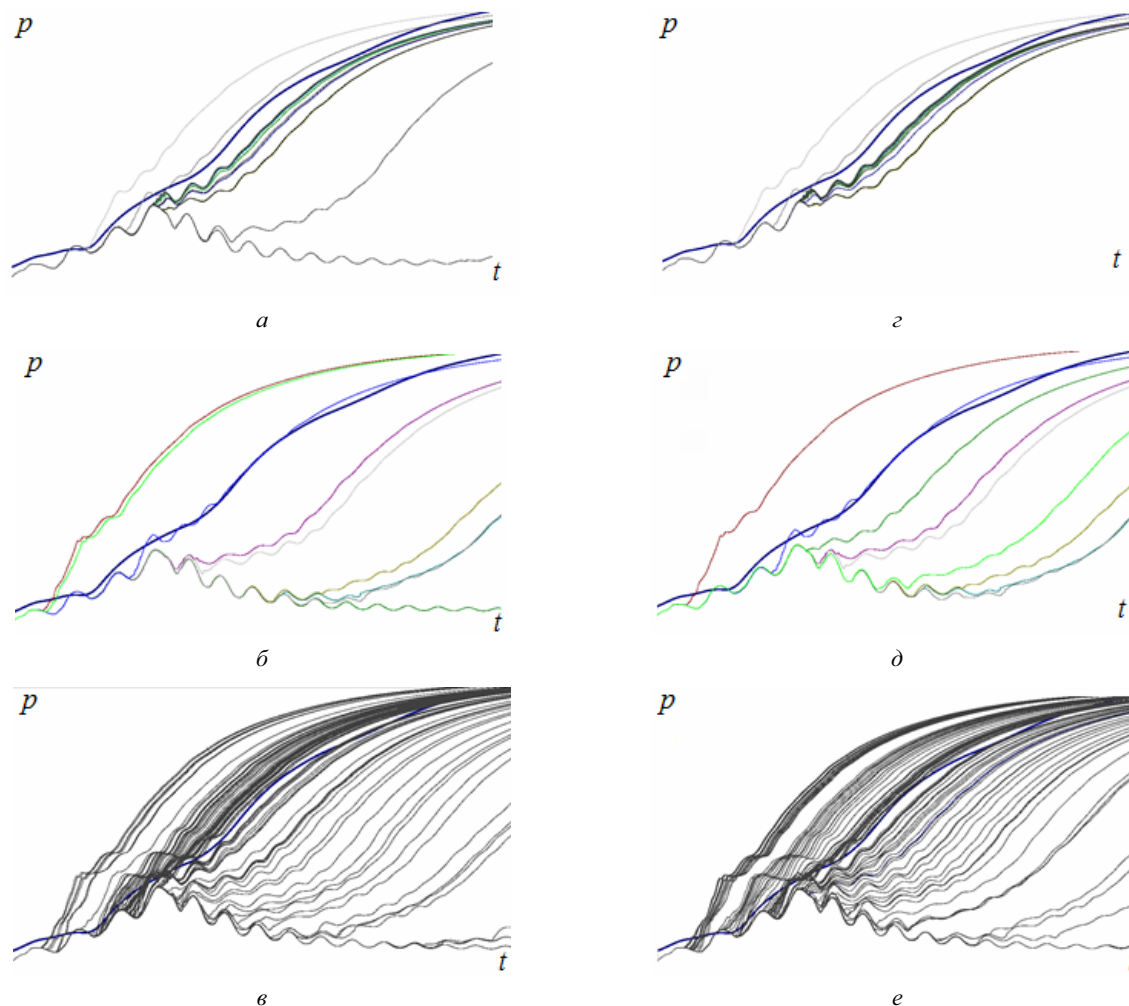


Рис. 2. Зависимости $p(t)$, соответствующие очередным приближениям к экспериментальной кривой $p_{\text{эксп}}(t)$: а, б, в – целевая функция (4); г, д, е – целевая функция (5); а, г – методы Ньютона; б, д – методы деформируемого многогранника; в, е – генетические методы

На рис. 2 для шести расчетных случаев представлены тестовая (экспериментальная) зависимость $p_{\text{эксп}}(t)$ (толстая линия на рисунках) и ряд зависимостей $p(t)$, построенных по результатам

выполнения очередной итерации при выборе значений A, s, f, r . На рис. 2, а–в представлены результаты решения задачи математического программирования при выборе целевой функции

в соответствии с (4). На рис. 2, *г–е* представлены результаты решения задачи математического программирования при выборе целевой функции в соответствии с (5). На рис. 2, *а, г* приводятся результаты, полученные методом Ньютона, на рис. 2, *б, д* – методом деформируемого многогранника, на рис. 2, *в, е* – генетическим алгоритмом. При решении задачи генетическим алгоритмом на рисунок

выводятся только лучшие результаты по поколению.

В таблице приводятся итоговые значения поисковых параметров, полученные различными методами (МН, МДФ, ГА) и при разных выбранных целевых функциях (формулы (4) и (5)). Следует заметить, что масштабы значений целевых функций (4) и (5) отличаются по определению.

Итоговые результаты решения задачи выбора коэффициентов A, s, f, r

Метод решения	Число итераций	Целевая функция	A	s	f	r
МН-4	58	0,0641	0,375	0,625	0,625	0,050
МДФ-4	10	0,0418	0,314	0,656	0,685	-0,368
ГА-4	50×80	0,0425	0,361	0,634	0,677	-0,198
МН-5	59	0,0216	0,375	0,625	0,625	0,050
МДФ-5	10	0,0121	0,314	0,656	0,685	-0,368
ГА-5	50×80	0,0109	0,494	0,635	0,646	-0,497

Анализ результатов выполненного исследования позволяет сделать следующие выводы, справедливые как для функции (4), так и для функции (5).

1. При принятой постановке задачи практически исключается нулевое значение целевой функции. Зависимость целевой функции от разыскиваемых параметров существенно нелинейная, и это не исключает наличия в этой зависимости нескольких локальных минимумов.

2. Сходимость метода Ньютона зависит от удачного выбора начального приближения, и это обусловлено значениями частных производных от целевой функции по разыскиваемым переменным. В случае если в первом приближении зависимость $p(t)$ размещается выше зависимости $p_{\text{эсп}}(t)$, то метод Ньютона сходится, и число необходимых итераций не превышает 60. В противном случае итерации могут не сходиться.

3. Генетический алгоритм, примененный при решении задачи, может обеспечить нахождение не только глобального, но и локальных минимумов. Это хорошо наблюдается на рисунке 2, *е*. Соответствующие локальным минимумам зависимости $p(t)$ многократно накладываются друг на друга. Вдали от локальных минимумов такой накладки зависимостей $p(t)$ не наблюдается. Однако для надежного нахождения решений задачи о выборе переменных A, s, f, r требуется большое число итераций. В рассмотренной задаче при первоначальном отборе пятидесяти особей для получения решений с заданной точностью (сравнимой с точностью решения при использовании методов Ньютона и деформируемого многогранника), потребовалась смена более сорока поколений.

4. В решаемой задаче метод деформируемого многогранника оказывается наиболее эффективным. При задании любого начального приближения решение быстро сходится (требуется 10...15 итераций).

Библиографические ссылки

1. Мищенко О. В. Математические модели как задачи выбора при проектировании объектов техники. Формулировка задач // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2016. – № 1(69). – С. 75–79.
2. Идентификация математических моделей работы ТРДУ с использованием экспериментальных результатов // А. В. Алиев, О. В. Мищенко, А. Г. Перемысловская, В. И. Черепов / Вестник ИжГТУ. – 2008. – № 2. – С. 45–47.
3. Алиев А. В. Математическое моделирование в энергомашиностроении. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2001. – 164 с.
4. Алиев А. В., Мищенко О. В. Математическое моделирование в технике. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2012. – 456 с.
5. Мищенко О. В. Указ. соч.
6. Соркин Р. Е. Газотермодинамика РДТТ. – М. : Наука, 1967. – 368 с.
7. Ерохин Б. Т. Теория и проектирование ракетных двигателей. – СПб. : Лань, 2015. – 608 с.
8. Численный эксперимент в теории РДТТ // А. М. Липанов, В. П. Бобрышев, А. В. Алиев [и др.]. – Екатеринбург : Наука, 1994. – 302 с.
9. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 488 с.
10. Алиев А. В., Сарабьев В. И., Бабин В. И. Применение методов математического программирования при решении задач о выходе РДТТ на режим квазистационарной работы // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и в ствольных системах : 4-я Международная конф. – Ижевск : Изд-во ИПМ УрО РАН. – С. 36–45.
11. Алиев А. В., Саушин П. Н. Подушки безопасности: вопросы баллистического проектирования // Автомобильная промышленность. – 2008. – № 5. – С. 32–35.
12. Моисеев Н. Н., Иванилова Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
13. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М. : Мир, 1975. – 536 с.
14. Тенев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. – 308 с.
15. Воеводина О. А., Мищенко О. В. Применение LU-и QR-методов при решении задачи о равновесном составе продуктов химической реакции // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2014. – № 3(63). – С. 172–176.
16. Алиев А. В., Мищенко О. В. Указ. соч.