

УДК 519.63:629.7

О. В. Мищенко, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ЗАДАЧЕ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА

В задачах, связанных с математическим моделированием, особый интерес представляют задачи выбора [1–4]. В [5–7] приводятся примеры решения задач выбора в применении к рабочим процессам в ракетных системах. В частности, это определение значений коэффициентов, входящих в закон регулирования многорежимной твердотопливной регулируемой двигательной установки [8]; определение закона теплообмена в объеме камеры сгорания по результатам сравнения расчетных и экспериментальных зависимостей давления продуктов сгорания от времени в период выхода РДТТ на режим квазистационарной работы [9]; определение параметров реактивного снаряда, обеспечивающих ему максимальную дальность полета [10], и т. д. Ниже подобный подход применяется для решения задачи о выборе параметров, входящих в математическую модель нестационарной скорости горения твердого топлива, на основании информации, полученной из эксперимента.

Будем рассматривать задачу о нестационарной скорости горения твердого топлива в постановке, соответствующей работам [11–13], и при следующих основных допущениях:

– твердое топливо полагается гомогенным, теплофизические характеристики которого не зависят от температуры;

– твердофазные реакции в топливе отсутствуют;

– температура на поверхности горящего топлива является функцией только давления в газовой фазе.

В соответствии с [14] математическая постановка задачи о горении твердого топлива может быть записана в следующем виде:

– уравнение теплопроводности

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} - u \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (1)$$

– начальные условия

$$t = 0: \quad T(y) = T_0; \quad (2)$$

– граничные условия

$$y = 0: \quad \lambda \frac{\partial T_s}{\partial y} = \rho c u_{\text{ст}} (T_s - T_0);$$

$$y \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

– условие горения

$$T_s = T_s(p) = x_1 + 10x_2 \left(\frac{p}{0,98 \cdot 10^5} \right)^{x_3}. \quad (4)$$

Здесь и ниже приняты следующие основные обозначения:

t, y – время процесса и пространственная координата (направлена перпендикулярно поверхности топлива вглубь прогретого слоя);

ρ – плотность материала;

c, λ – удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности;

T, T_s, T_0 – соответственно, температура топлива, значения температуры топлива на поверхности и в непрогретой области;

$u, u_{\text{ст}}, u_{\text{нс}}, u_{\text{экс}}$ – соответственно, значения скорости горения топлива, его стационарное, нестационарное и экспериментальное значения;

x_1, x_2, x_3 – поисковые параметры, входящие в эмпирическую зависимость температуры на поверхности топлива от давления в газовой фазе;

индексы i, n – соответствуют дискретным шагам конечно-разностной сетки, используемой при численном решении задачи теплопроводности, соответственно, по пространственной координате и по времени.

При известной зависимости для температуры на поверхности горящего топлива как функции давления в газовой фазе вычисление скорости горения твердого топлива строится по итерационному алгоритму [15, 16]. Итерации для значения скорости горения выполняются до тех пор, пока при решении уравнений теплопроводности не будет выполняться условие по температуре на поверхности горящего топлива – условие (4):

– запоминается профиль температур в прогретом слое $T_i^n, i = 1, I;$

– задается значение скорости горения топлива $u_{\text{нс}} = u_{\text{нс}}^{(1)}$ и решением уравнений теплопроводности устанавливается значение температуры $T_s^{(1)} = T_1^{n+1}$ на поверхности покрытия. Вычисляется отличие температуры $T_s^{(1)}$ на поверхности от температуры, устанавливаемой зависимостью (4) $T_s(p): \Delta T_s = T_s^{(1)} - T_s(p);$

– восстанавливается профиль температур $T_i^n, i = 1, I$ в прогретом слое топлива, задается новое значение скорости горения на второй итерации (и последующих) $u_{\text{нс}} = u_{\text{нс}}^{(2)}$, определяемое формулой

$$u_{\text{нс}}^{(2)} = u_{\text{нс}}^{(1)} - \frac{\partial u}{\partial T_s} \Delta T_s, \quad (5)$$

и производится пересчет профиля температур по прогретому слою повторным решением уравнений теплопроводности;

– итерации по формуле (5) выполняются до тех пор, пока значение $\Delta T_s > \varepsilon$, где ε – заданная точность вычислений.

В формуле (5) значения частной производной $\frac{\partial u}{\partial T_s}$ устанавливаются зависимостью

$$\frac{\partial u}{\partial T_s} = -\frac{u_{ст}}{(T_s - T_n)},$$

которая может быть найдена из уравнения баланса тепла на поверхности горящего топлива.

Единственное решение задачи (1)–(4) возможно лишь в случае, если известны коэффициенты x_1, x_2, x_3 , входящие в зависимость (4). Значения этих коэффициентов при известной экспериментальной зависимости $u_{экс}(t)$ может быть установлено решением следующей задачи выбора: *установить значения коэффициентов x_1, x_2, x_3 , входящих в уравнение (4) и обеспечивающих минимум целевой функции*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \min \int_{t_0}^{t_k} |u(t) - u_{экс}(t)| dt.$$

На значения коэффициентов x_1, x_2, x_3 будем накладывать ограничения вида

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 3.$$

Решение сформулированной задачи математического программирования предполагает многократное решение задачи о нестационарном горении твердого топлива с вычислением значения целевой функции Φ .

Определение оптимальных значений x_1, x_2, x_3 выполнялось с использованием метода Ньютона [17], деформируемого многогранника [18] и с использованием генетического алгоритма [19] (в дальнейшем будем обозначать эти методы, соответственно, МН, МДМ, ГА). Особенности реализации алгоритмов оптимизации остаются теми же, что и в [20–23].

Решение задач оптимизации выполнялось при следующих основных исходных данных:

- плотность твердого топлива 1632 кг/м³;
- коэффициент теплопроводности 0,6 Вт/(м·К);
- удельная теплоемкость 1200 кДж/(кг·К);
- первоначальная температура твердого топлива 300 К;
- температура продуктов сгорания 3500 К;
- закон для скорости горения топлива, соответствующего стационарным условиям,

$$u_{ст} = 0,00029 \cdot \exp(a) \cdot \left(\frac{P}{0,98 \cdot 10^5} \right)^{0,38},$$

$$a = 0,0486 \cdot \left(\frac{P}{0,98 \cdot 10^5} \right) - 0,000565 \cdot \left(\frac{P}{0,98 \cdot 10^5} \right)^2 + 0,0000025 \cdot \left(\frac{P}{0,98 \cdot 10^5} \right)^3. \quad (6)$$

В качестве зависимости $u_{экс}(t)$ принималась тестовая кривая, соответствующая решению задачи (1)–(4) при следующей зависимости для температуры на поверхности твердого топлива:

$$T_s = 680,0 + 5,0 \cdot \left(\frac{P}{0,98 \cdot 10^5} \right)^{0,9}.$$

Это соответствует значениям поисковых переменных $x_1 = 0,400$; $x_2 = 0,500$; $x_3 = 0,180$.

На каждой итерации при решении задачи оптимизации уравнение для скорости горения твердого топлива решалось следующим образом:

– в период времени от 0,0 до 0,1 с обеспечивалось установление задачи теплопроводности до стационарного уровня скорости горения твердого топлива, соответствующего уровню давления 10,1 МПа;

– в период времени от $t_0 = 0,1$ до $t_k = 0,3$ с давление, при котором происходит горение топлива, уменьшалось по линейному закону до уровня 0,1 МПа (соответствует скорости спада давления

$$\frac{dp}{dt} = 50,0 \text{ МПа/с};$$

– в период после 0,3 с давление оставалось постоянным и равным 0,1 МПа.

При численном решении задачи теплопроводности (1) конечно-разностная сетка по пространственной координате строилась с переменным шагом, увеличивающимся по геометрической прогрессии (знаменатель прогрессии принимался равным 1,25). Значение первого шага (на поверхности топлива) принималось равным 0,1 мкм.

Исходное приближение при решении задачи оптимизации принималось $x_1 = 0,500$; $x_2 = 0,500$; $x_3 = 0,500$.

Результаты выполненных расчетов представлены на рис. 1–5 и в таблице.

На рис. 1 представлены зависимости для скорости горения твердого топлива, справедливые для всех вариантов расчета задачи с использованием различных методов решения задачи оптимизации. Тонкая линия на рис. 1 соответствует квазистационарной скорости горения топлива, определяемой зависимостью (6). Толстая линия соответствует решению тестовой задачи с указанными выше значениями x_1, x_2, x_3 для этой тестовой задачи. Тонкая линия с метками – начальное приближение, соответствующее значениям поисковых параметров $x_1 = 0,500$; $x_2 = 0,500$; $x_3 = 0,500$.

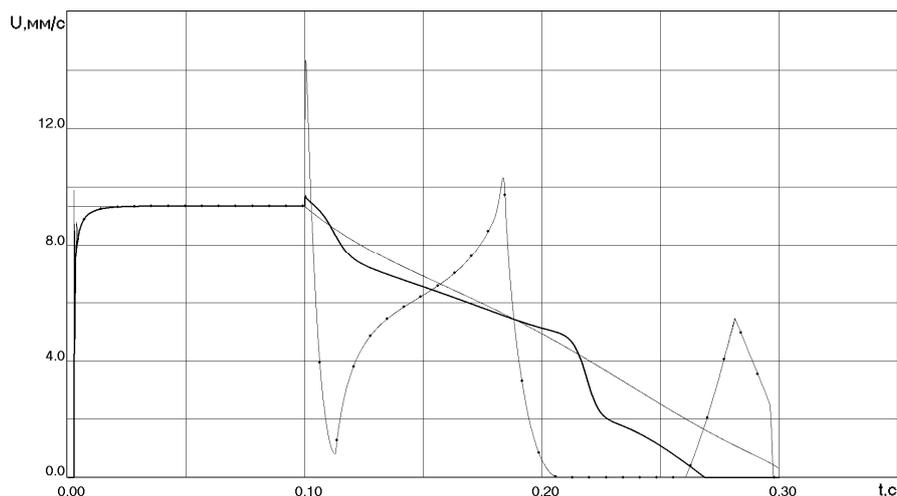


Рис. 1. Изменение скорости горения твердого топлива как функция времени

На рис. 2 представлены результаты, показывающие изменение целевой функции при использовании метода Ньютона (кривая 1) и метода деформируемого многогранника (кривая 2). Характер зависимостей целевой функции от номера итерации при использовании обоих методов заметно отличается, однако можно отметить, что после 60 итераций оба метода уже не обеспечивают улучшения результатов поиска. Анализ показывает, что метод деформируемого многогранника обеспечивает более точное определение результата (значение целевой функции при окончании итерационного поиска в методе Ньютона в три раза больше, чем при использовании метода деформируемого многогранника).

На рис. 3 представлены зависимости для нестационарной скорости горения твердого топлива, полученные методом Ньютона (рис. 3, а, приводятся результаты, полученные на 6, 41, 94-й итерациях) и методом деформируемого многогранника (рис. 3, б, приводятся результаты, полученные на 10, 31, 50, 191-й итерациях). На рис. 3, б отличие зависимостей $u_{nc}(t)$ после 50-й итерации мало и практически незначимо.

На рис. 4 представлены результаты, полученные при решении задачи (1)–(4) с использованием генетического алгоритма. Исходное поколение включало 30 особей, и расчет выполнялся до 50-го поколения. Приводятся зависимости изменения значений целевой функции (максимальное 1 и минимальное 2 значения внутри поколения). Анализ зависимости показывает, что верхняя и нижняя оценки целевой функции начинают совпадать после десятого поколения. Представленные на рис. 5 зависимости нестационарной скорости горения топлива от времени показывают, что отличие кривых $u_{nc}(t)$ становится несущественным после шестого поколения (кривые 2 и 3). Для справедливости следует отметить, что на рис. 5 зависимости представлены для особей, имеющих минимальное значение целевой функции внутри поколения.

В таблице приводятся итоговые значения целевой функции и поисковых параметров, полученные при решении задачи о нестационарной скорости горения твердого топлива различными методами оптимизации (МН, МДМ, ГА).

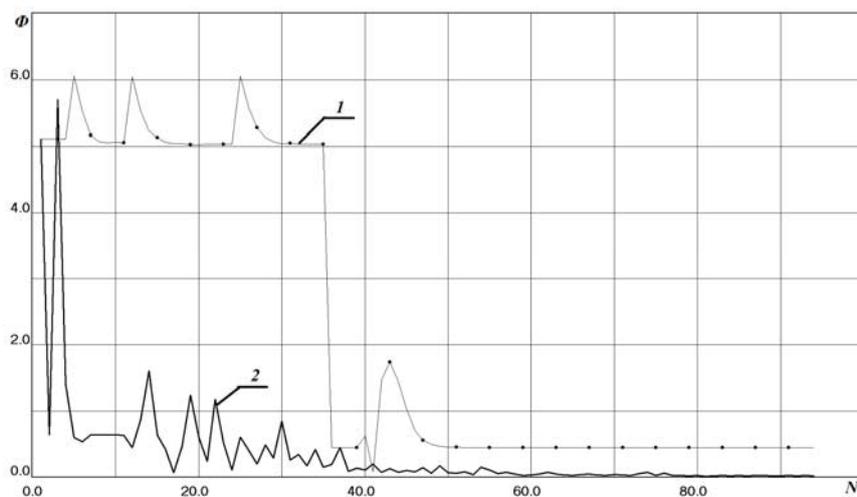
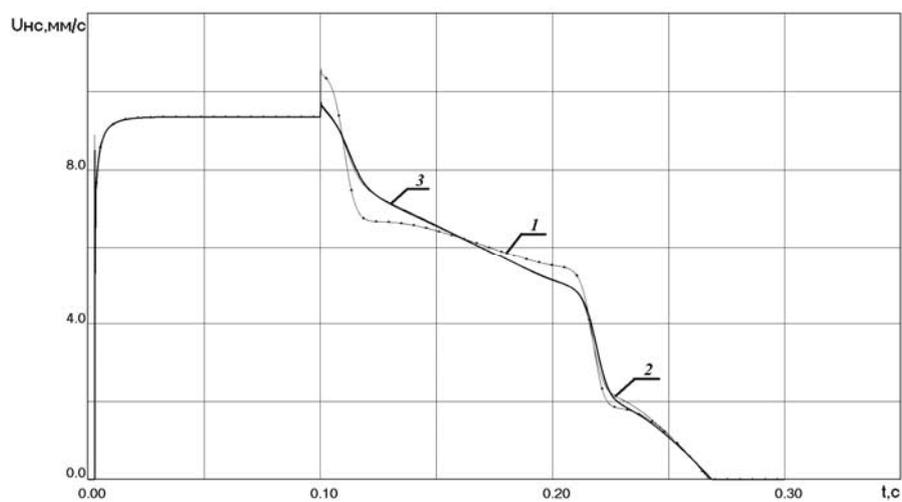
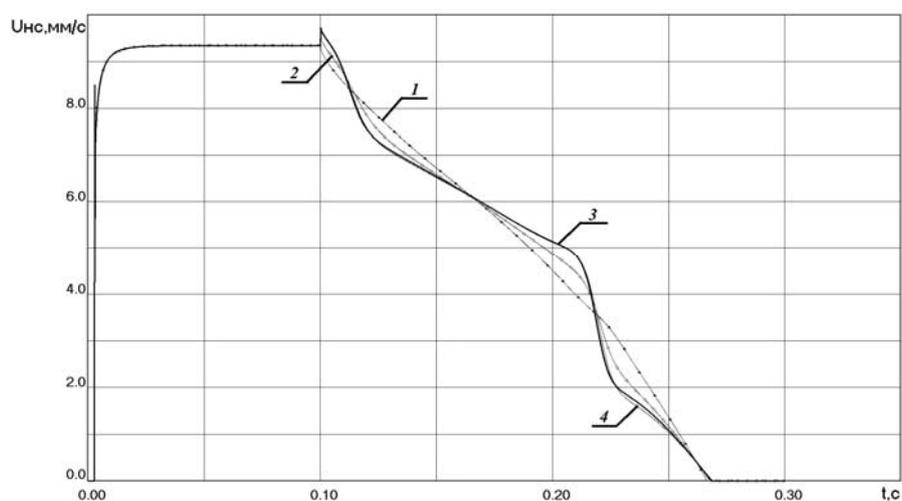


Рис. 2. Изменение целевой функции при выполнении итераций:
1 – метод Ньютона, 2 – метод деформируемого многогранника



а



б

Рис. 3. Зависимость скорости горения от времени на различных этапах итерационного процесса: а – метод Ньютона (кривая 1 – 36-я итерация, кривая 2 – 41-я итерация, кривая 3 – 94-я итерация); б – метод деформируемого многогранника (кривая 1 – 10-я итерация, кривая 2 – 31-я итерация, кривая 3 – 50-я итерация, кривая 4 – 191-я итерация)

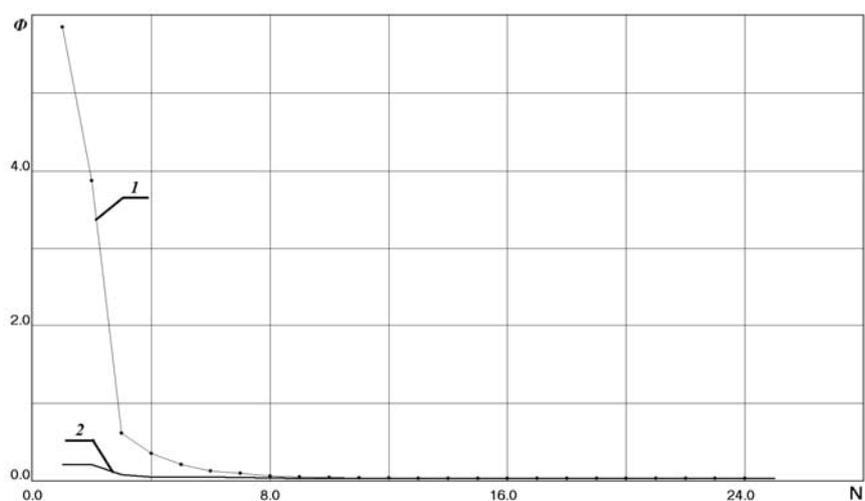


Рис. 4. Изменение целевой функции по мере изменения поколений, генетический алгоритм: 1 – максимальное значение в поколении; 2 – минимальное значение

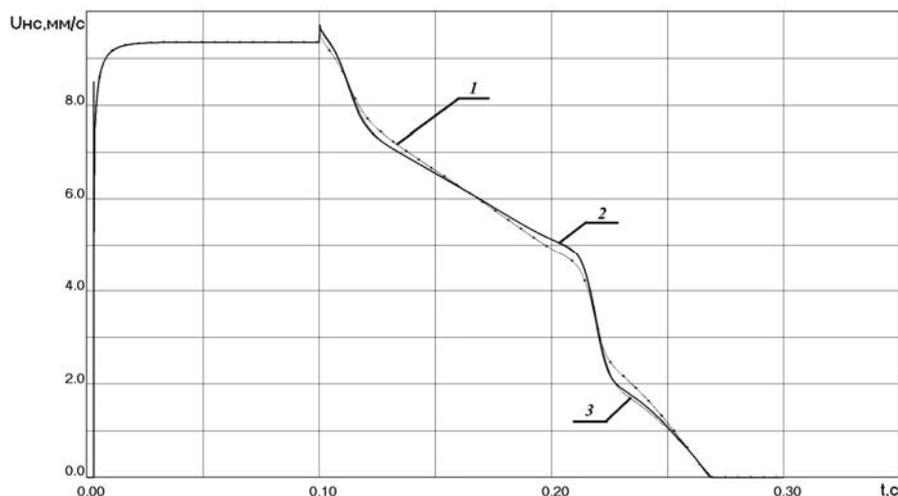


Рис. 5. Зависимость скорости горения от времени на различных этапах итерационного процесса, генетический алгоритм: кривая 1 – поколение 2; кривая 2 – поколение 6; кривая 3 – поколение 50

Итоговые результаты решения задачи о нестационарной скорости горения топлива

Метод решения	МН	МДМ	ГА	Точное решение
Число итераций	94	191	30×50	
Целевая функция	0,0451184	0,0149938	000,0348386	000,000
x_1	1,000	0,4120307	000,275097	000,400
x_2	0,01131552	0,3994	000,767042	000,500
x_3	0,3625889	0,1891668	000,162356	000,180
ϑ_w, K	800,0	682,40614	632,4712	680,0
γ, K	0,1131552	3,994	007,67042	005,0
μ	1,8129445	0,945834	000,81178	000,9

Анализ результатов выполненного исследования позволяет сделать следующие выводы.

1. В принятой постановке сходимость к решению трех рассмотренных методов монотонная, что свидетельствует о существовании единственного минимума целевой функции на рассматриваемой расчетной области.

2. Наилучшее приближение к точному решению обеспечивает метод деформируемого многогранника. Завершение расчетов этим методом происходит после 191-й итерации, при этом целевая функция принимает значение в 3 раза меньшее, чем при использовании метода Ньютона, и в 2,3 раза меньшее, чем при использовании генетического алгоритма. Отличие полученного решения при использовании МДМ по значению температуры на поверхности твердого топлива не превосходит 0,35 %.

3. Использованная версия генетического алгоритма не позволяет улучшить значения целевой функции после десятого поколения. Расчеты показывают, что с десятого поколения значения поисковых параметров полностью совпадают (по шести значащим цифрам).

4. Показано, что предложенный метод определения температуры на поверхности горящего топлива в сочетании с известной из эксперимента зависимости скорости горения от времени и скорости спада (нарастания) давления в камере сгорания может быть использован при построении полуэмпирических мо-

делей нестационарной скорости горения для реальных рецептур твердого топлива.

Библиографические ссылки

1. Алиев А. В. Математическое моделирование в энергомашиностроении. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2001. – 164 с.
2. Алиев А. В., Мищенко О. В. Математическое моделирование в технике. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2012. – 456 с.
3. Aliiev A. V., Mishchenkova O. V. Mathematical Modeling and Numerical Methods in Chemical Physics and Mechanics. – Waretown-Oakvile : Apple Academic Press, 2016. – 544 p.
4. Мищенко О. В. Математические модели как задачи выбора при проектировании объектов техники. Формулировка задач // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2016. – № 1(69). – С. 75–79.
5. Идентификация математических моделей работы ТРДУ с использованием экспериментальных результатов // А. В. Алиев, О. В. Мищенко, А. Г. Перемысловская, В. И. Черепов // Вестник ИжГТУ. – 2008. – № 2. – С. 45–47.
6. Мищенко О. В. Решение задач выбора при анализе процессов в твердотопливных двигателях // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2016. – № 2(70). – С.
7. Мищенко О. В. Выбор параметров ракетного снаряда, обеспечивающих максимальную дальность полета // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2016. – № 3(71). – С. 74–77.
8. Идентификация математических моделей работы ТРДУ с использованием экспериментальных результатов.
9. Мищенко О. В. Решение задач выбора при анализе процессов в твердотопливных двигателях.

10. Мищенкова О. В. Выбор параметров ракетного снаряда, обеспечивающих максимальную дальность полета.
11. Зельдович Я. Б., Лейтунский О. И., Либрович В. Б. Теория нестационарного горения пороха. – М. : Наука, 1975. – С.
12. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. – М. : Наука, 1973. – 174 с.
13. Соркин Р. Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. – М. : Наука, 1983. – 288 с.
14. Там же.
15. Алиев А. В., Мищенкова О. В. Указ. соч.
16. Aliev A. V., Mishchenkova O. V. Указ. соч.
17. Мусеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 488 с.
18. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М. : Мир, 1975. – 536 с.
19. Тенев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. – Ижевск : Изд-во ИЖГТУ, 2010. – 308 с.
20. Мищенкова О. В. Математические модели как задачи выбора при проектировании объектов техники. Формулировка задач.
21. Идентификация математических моделей работы ТРДУ с использованием экспериментальных результатов.
22. Мищенкова О. В. Решение задач выбора при анализе процессов в твердотопливных двигателях.
23. Мищенкова О. В. Выбор параметров ракетного снаряда, обеспечивающих максимальную дальность полета.

Получено 31.10.2016