

УДК 531.383

DOI 10.22213/2413-1172-2018-1-7-11

Р. В. Мельников, магистрант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

А. В. Щенятский, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

Г. А. Трутнев, соискатель, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## ПОДХОДЫ К РАСЧЕТУ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА

### Введение

**Т**вердотельный волновой гироскоп (ТВГ) – это измерительный прибор, определяющий изменение углов ориентации связанного с ним тела относительно инерциальной системы координат при вращении относительно оси прибора [1]. В основе работы ТВГ лежит явление инертности упругих волн.

Этот эффект впервые был открыт в конце XIX в. британским физиком Джорджем Брайаном [2, 3]. Экспериментально получено, что при повороте резонатора на угол  $90^\circ$  в инерциальном пространстве поворот стоячей волны относительно того же инерциального пространства будет равен  $\approx 63^\circ$ . Это равносильно повороту стоячей волны относительно резонатора на угол  $27^\circ$ . В реальных конструкциях ТВГ используется тонкостенный полусферический резонатор [4, 5]. Основные колебания сосредоточены на нижней части – кромке резонатора, поэтому в первом приближении можно рассматривать колебания кольца. При этом авторами [6] принимаются следующие упрощения и допущения:

- решается плоская задача;
- рассматривается плоское кольцо;
- перемещение масс осуществляется в плоскости.

А также внутренний и наружный диаметр кольца отличаются на 2 мм, т. е. толщина стенки составляет 1 мм, или 0,0333 от внешнего диаметра.

Наиболее простыми в представлении считаются механические модели с массами, которые дают представление о колебательной картине резонатора. Для примера рассмотрим одну из них [7].

На рис. 1 представлена механическая система, которая может свободно вращаться вокруг центральной точки с установленной угловой скоростью  $\Omega$ . Система состоит из 16 масс  $m$ , равноудаленных от центра.

Это необходимо для правильной постановки задачи, поскольку в реальном приборе исполь-

зуется 16 управляющих электродов. В состоянии равновесия расстояние от центра до массы считаем равным единице. Нумеровать массы будем против часовой стрелки, крайнюю правую массу считаем первой. Массы расположены на направляющих стержнях, шарнирно соединенных с центром системы. На стержни навиты пружины с жесткостью  $k$  и коэффициентами демпфирования  $b$ .

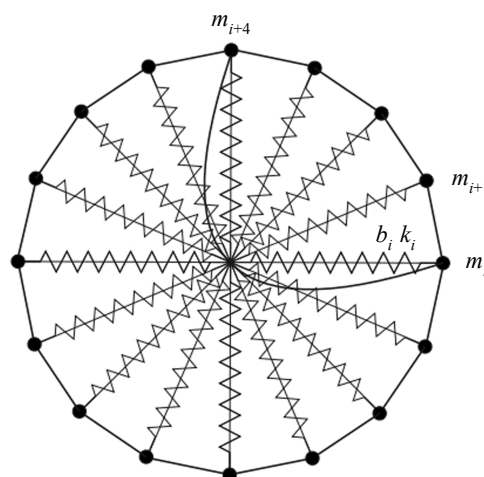


Рис. 1. Механическая система

Соседние массы соединены жесткой нерастяжимой связью; это связано с тем, что деформации растяжения и сжатия кромки резонатора (в направлении оси  $R$ ) существенно меньше деформации изгиба, и поэтому не будут учитываться. Также в механической системе есть  $i$  дополнительных связей в виде гибких нерастяжимых соединений, проходящих через центр и соединяющих массы, отделенные углом  $90^\circ$  (на рис. 1 показано только одно соединение, остальные добавляются аналогично). Это необходимо для того, чтобы при возбуждении второй формы колебаний перемещения масс по перпендикулярным осям были равны по величине и обратны по знаку, как и в реальном резонаторе.

Рассмотрим случай идеальной системы: все массы равны  $m$ , все жесткости равны  $k$ , коэффициенты сопротивления равны единице. Возьмем нулевое управляющее воздействие, тогда получим уравнение

$$Ax' + 4hBx' + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4); \quad h = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}},$$

где  $h$  – обобщенная внешняя сила, действующая на каждую массу  $m$ ;  $x$  – радиальные отклонения;  $\omega$  – частота колебаний резонатора;

$$A = \begin{pmatrix} 3h^2 + 1 & 2h^2 & 0 & -2h^2 \\ 2h^2 & 3h^2 + 1 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 2h^2 & 3h^2 + 1 & 2h^2 \\ -2h^2 & 0 & 2h^2 & 3h^2 + 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Решение может быть разложено по собственным формам колебаний. Найдем изменение второй формы колебаний, которое описывается векторами  $s$  и  $s$ . Для этого воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Примем:

$$x = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} p(t) + \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(3\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} q(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} p(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} q(t), \quad (3)$$

где  $p, q$  – амплитуды второй формы колебаний. В изделии  $p$  – это сигнал в косинусном канале, а  $q$  – сигнал в синусном канале.

Подставляем выражение (2) в (3), получим

$$A(cp' + sq') + 4hB(cp' + sq') + \omega^2(cp + sq) = 0. \quad (4)$$

Далее полученное выражение скалярно умножаем на  $s$  и  $s$ , находим значения произведений и упрощаем. После проведения всех преобразований окончательно получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p' + 4K_1q' + K_2p, \\ q' - 4K_1p' + K_2q, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$K_1 = \frac{(\sqrt{2} + 1)h}{(3 + 2\sqrt{2})h^2 + 1} = 0,390;$$

$$K_2 = \frac{\omega^2}{(3 + 2\sqrt{2})h^2 + 1} = 0,813\omega^2.$$

Проведенный анализ показал, что рассмотренная модель близка по свойствам к кольцу, так как масштабный коэффициент модели ближе к масштабному коэффициенту кольца [8]. Данная модель проще кольцевой – в ней отсутствуют частные производные, но она подходит для конкретного числа масс. При изменении количества масс изменятся матрицы системы, что впоследствии приведет к необходимости произвести расчет новой системы уравнений. Кроме того, при реализации модели приняты следующие допущения:

- рассматривается нулевое управляющее воздействие;
- все массы равны  $m$ ;
- соединения между массами считается нерастяжимым.

Рассмотренная модель очень громоздка; кроме того, в ней нет коэффициентов жесткости и демпфирования. Коэффициенты  $k$  и  $b$  можно найти экспериментально, но такой метод нахождения слишком дорогостоящий, так как при неоднозначных экспериментах резонаторы ломаются, не говоря уже о том, что затраты на изготовление самих резонаторов разной плотности не имеют смысла.

С другой стороны, коэффициенты  $k$  и  $b$  можно найти с помощью метода конечных элементов. Для этого необходимо принять некоторые ограничения:

- рассматривается идеальная осесимметричная деталь;
- тело однородное;
- коэффициент плотности одинаков на всей поверхности резонатора.

Многомассная модель потребовала не только применения допущений и ограничений, но и привлечения аппарата МКЭ для определения вели-

чин  $k$  и  $b$ , причем расчеты проводились для идеального изделия. Таким образом, рассмотренная модель дает представление о динамике ТВГ, но численные значения будут приближенными.

Вторым методом, дающим возможность опделить технические параметры ТВГ с незначительными допущениями, является МКЭ.

### Численный эксперимент

Факторов, влияющих на собственную частоту резонатора, много. Их можно разделить на две группы. К первой группе относятся конструктивные, ко второй – свойства материалов [9]. Чтобы оценить зависимость резонансной частоты от факторов, было решено провести численный эксперимент.

Планирование эксперимента позволяет сопоставить влияние отдельных факторов.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – совокупность нескольких результатов численного эксперимента, удовлетворяющих следующим условиям:

- количество вычислений составляет  $2n$ , где  $n$  – количество факторов;
- каждый фактор принимает только два значения – верхнее и нижнее;
- в процессе вычислений верхние и нижние значения факторов комбинируются во всех возможных сочетаниях [10].

Для проведения ПФЭ возьмем три фактора:

- 1)  $x_1$  – коэффициент плотности кварца;

2)  $x_2$  – усредненный коэффициент жесткости резонатора в тангенциальном направлении;

3)  $x_3$  – толщина стенки резонатора.

Выбранные факторы управляемы (т. е. мы можем на них воздействовать) и однозначны (выражаются одним числом и не зависят друг от друга). Точность измерительных машин достаточно высока для построения модели. Также эти факторы совместимы, т. е. их комбинации осуществимы и безопасны.

### Описание численного эксперимента

Для проведения численного полнофакторного эксперимента выбран МКЭ, реализуемый посредством ресурсов ЭВМ [11]. В программном продукте ANSYS были созданы модели резонатора.

На основе выбранных факторов составлена матрица численного эксперимента, в которой первый, второй и третий столбцы представляют собой значения факторов, последний столбец – значения отклика системы. В таблице представлены значения эксперимента.

Математическая модель системы получается в результате аппроксимации модели какой-либо функцией, например:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3, \quad (6)$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  – искомые параметры модели.

### Матрица эксперимента

×1	×2	×3	×1×2	×1×3	×2×3	×1×2×3	Значение отклика системы
2,1	31180	0,95	65478	1,995	29621	62204,1	5264,032
2,1	31180	1	65478	2,1	31180	65478	5523,754
2,1	31250	0,95	65625	1,995	29678,5	62343,75	5267,65
2,1	31250	1	65625	2,1	31250	65625	5525,36
2,32	31180	0,95	72337,6	2,204	29621	68720,72	5264,032
2,32	31180	1	72337,6	2,32	31180	72337,6	5523,754
2,32	31250	0,95	72500	2,204	29678,5	68875	5267,65
2,32	31250	1	72500	2,32	31250	72500	5525,36

Для создания математической модели была проведена нормировка данных и найдены все коэффициенты уравнения после нормировки:

$$a_0 21580,796; a_1 7708,8; a_2 0,0006; a_3 133,19.$$

Таким образом, нормированная модель в окрестностях точки (2,15; 31215; 0,975) имеет вид

$$y = 21580,796 + 7708,8x_1 + 0,0006x_2 + 133,19x_3. \quad (7)$$

Переход от нормированных к ненормированным факторам осуществляется обратным пре-

образованием [9]. Для приведенных выше данных (эксперимента)

$$a_0 5573,62; a_1 7008,12; a_2 0,00002; a_3 532,6.$$

Окончательно получаем модель в естественных координатах:

$$y = 5573,62 + 7008,12x_1 + 0,00002x_2 + 532,6x_3. \quad (8)$$

Ошибки в определении коэффициентов полинома можно охарактеризовать соответствующей дисперсией. Для оценки уровня ошибки проводится проверка однородности дисперсии воспроизводимости.

### Обсуждение результатов численного полнофакторного эксперимента

Из уравнения (8) видно, что коэффициент при факторе  $x_1$  положителен и значителен. Это свидетельствует о том, что плотность кварцевого стекла существенно влияет на собственную частоту колебаний ЧЭ; также увеличение плотности прямо пропорционально увеличению собственной частоты.

Коэффициент при факторе  $x_2$  положителен и, несмотря на небольшое значение, свидетельствует о достаточном влиянии коэффици-

ента жесткости на собственную частоту колебаний.

Коэффициент при факторе  $x_3$  положителен и незначителен. Это свидетельствует о том, что с изменением толщины стенки резонатора частично будет меняться частота колебаний.

В результате численного эксперимента установлено взаимное влияние факторов  $x_1, x_2, x_3$  на собственную частоту колебаний.

Наглядное представление о влиянии факторов  $x_1$  и  $x_2$  численного эксперимента на собственную частоту колебаний показано на рис. 2.

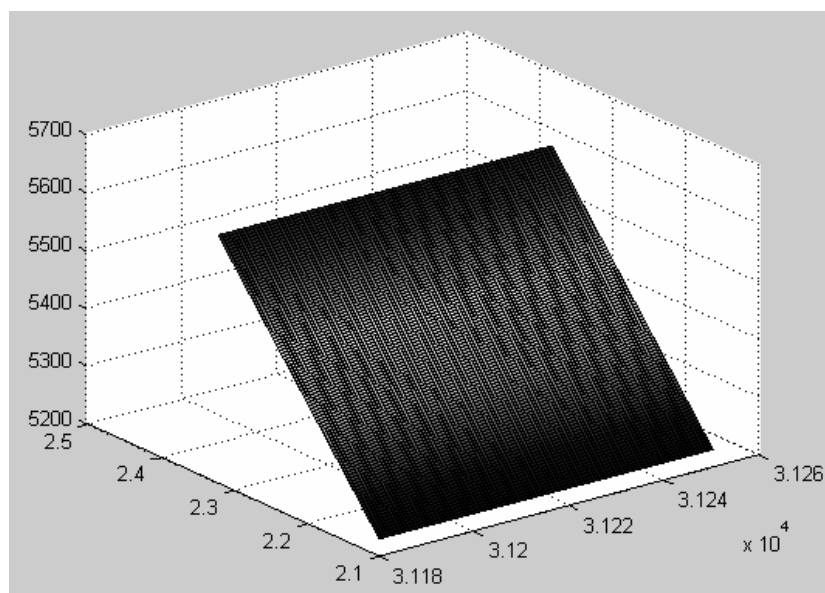


Рис. 2. Поверхность отклика (зависимость влияния факторов численного эксперимента на собственную частоту колебаний ЧЭ ТВГ)

Из рис. 2 видно, что зависимость собственной частоты колебаний резонатора ТВГ близка к линейной. При возрастании численных значений таких факторов, как коэффициент плотности кварца и усредненный коэффициент жесткости резонатора в тангенциальном направлении, значение собственной частоты ЧЭ также возрастает.

### Выводы

В результате численного эксперимента получена закономерность в виде уравнения регрессии, отражающая влияние конструктивных факторов и свойств материала, таких как плотность кварцевого стекла, коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования, на собственную частоту колебаний резонатора.

Второй подход к расчету технических характеристик оказался менее трудозатратным и более энергоэффективным. Вычисленные в МКЭ численные значения могут применяться в ана-

литических методах для исследования модели гироскопа, а также для разработки методики балансировки ЧЭ.

### Библиографические ссылки

1. Измерительно-вычислительный комплекс «Твердотельный волновой гироскоп» / Г. А. Трутнев, С. Б. Назаров, К. К. Первозчиков, А. В. Щенятский // Интеллектуальные системы в производстве. 2017. Т. 15, № 3. С. 62–72.
2. Бетия Ж., Гро А., Гроссе Ж. Новое поколение инерциальных блоков на основе вибрационных датчиков, используемых в качестве резервных измерителей // Гироскопия и навигация. 2006. № 1.
3. Bryan G. H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys Sci. 1890. Vol. 7. Pp. 101-111.
4. Пешехонов В. Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация, 2011, № 1.
5. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М. : Наука, 1985.

6. Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа : учеб. пособие для вузов. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 168 с. : ил.

7. Бонштедт А. В., Кузьмин С. В., Мачехин П. К. Восьмиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. № 1. С. 135–214.

8. Лунин Б. С. Физико-химические основы разработки полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов. М. : Изд-во МАИ, 2005. 224 с. : ил.

9. Трутнев Г. А. Шестнадцатиточечная модель ТВГ // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2011. Вып. 2.

10. Адлер Ю. П. Введение в планирование эксперимента. М. : Металлургия, 1968. 155 с.

11. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы аппроксимация : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 318 с. : ил.

### References

1. Trutnev G. A., Nazarov S. B., Perevozchikov K. K., Shchenyatskii A. V. (2017). *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve* [Intellectual systems in production], vol. 15, no. 3, pp. 62-72 (in Russ.).

2. Betiya Zh., Gro A., Grosse Zh. (2006). *Giroskopiya i navigatsiya* [Giroskopiya and navigation], no. 1 (in Russ.).

Получено 01.02.2018

3. Bryan G. H. (1890). On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys Sci.* Vol. 7, pp. 101-111.

4. Peshekhonov V. G. (2011). *Giroskopiya i navigatsiya* [Giroskopiya and navigation], no. 1 (in Russ.).

5. Zhuravlev V. F., Klimov D. M. (1985). *Volnovoï tverdotel'nyi giroskop* [Wave solid-state gyroscope]. Moscow: *Nauka* (in Russ.).

6. Matveev V. A., Lipatnikov V. I., Alekhin A. V. (1997). *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Design of a wave solid-state gyroscope]. Moscow: *MGTU im. N. E. Baumana* (in Russ.).

7. Boshstedt A. V., Kuz'min S. V., Machekhin P. K. (2007). *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika* [Messenger of the Udmurt university. Mathematics], no. 1, pp. 135-214 (in Russ.).

8. Lunin B. S. (2005). *Fiziko-khimicheskie osnovy razrabotki polusfericheskikh rezonatorov volnovykh tverdotel'nykh giroskopov* [Physical and chemical bases of development of hemispherical resonators of wave solid-state gyroscopes]. Moscow: *MAI* (in Russ.).

9. Trutnev G. A. (2011). *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika* [Bulletin of the Udmurt university. Mathematics], iss. 2 (in Russ.).

10. Adler Yu. P. (1968). *Vvedenie v planirovanie eksperimenta* [Introduction to planning of an experiment]. Moscow: *Metallurgiya* (in Russ.).

11. Zenkevich O., Morgan K. (1986). *Konechnye elementy approksimatsiya* [Final elements approximation]: Moscow: *Mir* (in Russ.).