

УДК 621.865.8(045)

DOI 10.22213/2413-1172-2018-1-19-22

Ю. В. Турыгин, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

Ю. В. Зубкова, кандидат технических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

Т. Н. Сперанских, магистрант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА РОБОТА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

### Введение

**Ш**ирокое применение манипуляционных роботов обуславливает важность и необходимость разработки систем автоматического управления данными устройствами. Одним из ключевых этапов конструирования контуров управления роботами является построение математической модели, в той или иной степени отражающей поведение реального объекта при различных внешних условиях. К настоящему моменту известны математические модели, соответствующие роботам различного назначения. Однако в большинстве случаев данные модели представлены в первой типовой форме записи в виде дифференциальных уравнений, содержащих входные и выходные сигналы. Для синтеза законов регулирования современными разработчиками, как правило, применяется описание объектов в пространстве состояний [1].

Таким образом, актуальность темы определяется необходимостью создания такой модели управления, которая обеспечит высокую точность позиционирования при определении положения объекта в пространстве.

Для построения математической модели робота можно выделить две основные задачи, которые взаимосвязаны. Первая задача – это создание точной кинематической модели робота, которая позволит определить его пространственную структуру (форму) и даст возможность описывать законы перемещения рабочего органа; вторая – описание динамических характеристик робота, что, в свою очередь, позволит описать его поведение при отработке им заданной траектории.

Допущением данной математической модели можно считать то, что податливостью звеньев робота можно пренебречь, считая звенья абсолютно жесткими [2].

### Математическая модель движения конечного звена робота

Для описания движений робота-манипулятора существует несколько математических моделей: кинематические, статические и динамические [3].

Математическое описание робота связывает входные переменные с выходными. Входными переменными являются усилия от двигателей:

$$Q_g(Q_{g1}, Q_{g2}, \dots, Q_{gn}), \quad (1)$$

где  $n$  – число степеней подвижности. Выходными  $x$  переменными являются перемещения и ориентация рабочего органа (положение рабочего органа).

Абсолютные координаты  $x_i$  определяются положением всех звеньев робота  $q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . В общем механическую систему робота можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = f(g), \\ q = A_m(Q_g, Q_b), \end{cases} \quad (2)$$

где  $x = f(g)$  – уравнение кинематики робота, позволяющее определить абсолютные координаты всех звеньев  $x$  через относительные  $q$ ;  $q = A_m(Q_g, Q_b)$  – уравнение динамики манипулятора.

$$Q_g(Q_{g1}, Q_{g2}, \dots, Q_{gn}),$$

где  $Q_g(Q_{g1}, Q_{g2}, \dots, Q_{gn})$  – усилия двигателей по координатам звеньев;  $Q_b(Q_{b1}, Q_{b2}, \dots, Q_{bn})$  – возмущающие воздействие и противодействие;  $A_m$  – оператор механической системы [4].

*Кинематические модели* применяются в тех случаях, когда скорости перемещения звеньев малы, а система статически уравновешена. С увеличением скорости движения важное значение приобретает тип привода.

Область применения моделей, учитывающих динамику, определяется высокими значениями скорости и ускорения звеньев.

Предметом кинематики является аналитическое описание геометрии движений робота относительно некоторой заданной абсолютной системы координат без учета сил и моментов, порождающих это воздействие. Задачей кинематики является аналитическое описание пространственного расположения манипулятора в зависимости от времени [5].

Роботы-манипуляторы обычно представляют собой открытую кинематическую цепь, элементы которой соединены между собой посредством кинематических пар; как правило, это либо вращательные, либо поступательные кинематические пары. Положение кинематической цепи можно определить с помощью обобщенных координат  $q_i = (i = 1, 2, \dots, n)$ , характеризующих относительные перемещения в кинематических парах. Для определения положения рабочего органа в пространстве можно воспользоваться первым уравнением из системы (2)  $x = f(q)$ , которое составляется по правилам аналитической геометрии [6].

Звено робота представляет собой твердое тело, характеризующееся набором параметров  $C_i(K_i, D_i)$ , где  $K_i$  – множество кинематических параметров;  $D_i$  – множество динамических параметров;  $i$  – номер звена.

*Динамическая модель*, в отличие от кинематической, должна учитывать не только геометрические размеры звеньев и распределение кинематических пар, но и распределение масс звеньев робота; необходимо учитывать и другие характеристики робота, такие как упругие свойства элементов. Динамическая модель исполнительного устройства может быть построена на основе использования известных законов ньютоновской или лагранжевой механики [7]. Получение математической модели динамики механической конструкции робота в виде системы дифференциальных уравнений в форме Лагранжа включает в себя решение прямой и обратной задач динамики и удобно для алгоритмизации. Рассмотрим уравнение Лагранжа второго рода, так как оно является традиционным и наиболее часто применяемым на практике:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + Q_i, \quad (3)$$

где  $E_k$  и  $E_p$  – кинетическая и потенциальная энергия системы,  $q_i$  – обобщенные координаты (в общем случае их число превышает число степеней подвижности робота);  $Q_i$  – обобщенные силы, силы и моменты, развиваемые приводами, а также внешние силы и моменты, например, возникающие при взаимодействии звеньев робота с внешней средой.

Используя уравнение (3), можно составить уравнения движения в матричной форме, тогда уравнение примет вид

$$A(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = U, \quad U = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $A(q) \in R6 \times R6$  – положительно определенная функциональная матрица, определяющая квадратичную форму скоростей в выражении для кинетической энергии корпуса;  $B(q, \dot{q}), U$  – вектор-функция размерности  $6 \times 1$ , причем  $q$  входит в  $B(q, \dot{q})$  как элемент квадратичной зависимости. Матрица  $A(q)$  и вектор  $B(q, \dot{q})$  в уравнении движения корпуса определяются выбором точки  $C$  на корпусе и распределением масс.

При построении математической модели должны учитываться факторы, которые влияют на исследуемый параметр – точность положения концевой точки рабочего органа при отработке траектории. В данном случае факторами выступают: масса груза, число степеней подвижности манипулятора, скорость, режим и траектория движения, заданный алгоритм управления, координаты начальной и конечной точек движения.

На основании проведенного анализа вышеперечисленных факторов, влияющих на точность отработки траектории выходным звеном робота, была предложена обобщенная математическая модель, представленная в виде

$$F_\Delta = \{ \Delta r(\Delta q, \delta_\Sigma, J_\Sigma, \Delta q', \Delta_D, v, m, n) \}, \quad (5)$$

где  $\Delta r$  – полная погрешность мехатронной системы;  $\Delta q$  – погрешность системы управления и двигателя;  $\delta_\Sigma$  и  $J_\Sigma$  – кинематическая погрешность и мертвый ход преобразователя движения соответственно;  $\Delta q'$  – погрешность, вызванная податливостью механизма;  $\Delta_D$  – дина-

мическая погрешность;  $v$  – скорость выходного звена МС;  $m$  – масса рабочего органа МС;  $n$  – число звеньев, участвующих в движении.

Степень влияния этих факторов на точность позиционирования выходного звена различна и зависит от характеристик оборудования, режимов его работы и параметров технологического процесса [8].

Допущением данной математической модели можно считать то, что податливостью звеньев робота можно пренебречь, считая звенья абсолютно жесткими. Математическая модель робота имеет большое значение для управления роботами, так как позволяет определить движение робота в целом.

Полная погрешность выходного звена мехатронного модуля определяется в виде

$$\Delta = \Delta q + \delta_{\Sigma} + J_{\Sigma} + \Delta q', \quad (6)$$

где  $\Delta q$  – погрешность системы управления и двигателя;  $\delta_{\Sigma}$  – кинематическая погрешность преобразователя движения;  $J_{\Sigma}$  – мертвый ход преобразователя движения;  $\Delta q'$  – погрешность, вызванная податливостью преобразователя движения [9].

Погрешность системы управления и двигателя, приведенная к выходному звену преобразователя движения, может быть определена как

$$\Delta q = \frac{\Delta \varphi_{дв}}{u}, \quad (7)$$

где  $u$  – передаточное отношение преобразователя движения;  $\Delta \varphi_{дв}$  – погрешность угла поворота двигателя. В случае отсутствия точных данных приближенно можно принимать  $\Delta \varphi_{дв} = 5 \dots 10$  угловых минут.

Большое влияние на выходную точность исполнительного устройства оказывают зазоры (люфты)  $\Delta q''_j$  в кинематических парах исполнительного механизма. Они вносят дополнительные малые подвижности в систему, сообщают ей двигательную избыточность. При наличии нескольких кинематических пар движение исполнительного устройства может сопровождаться «разрывами» и последующими соударениями в кинематических парах, что значительно усложняет учет влияния зазоров на величину погрешности перемещения рабочего органа [10].

Погрешность обобщенной координаты – разность между ее действительными и расчетными значениями:

$$\Delta q_j = q_{jd} - q_{jp}, \quad (8)$$

где  $j$  – номер привода;  $q_{jd}$  – действительное значение погрешности;  $q_{jp}$  – расчетное значение погрешности.

По величине погрешность обобщенной координаты равна сумме указанных погрешностей:

$$\Delta q_j = \Delta q''_j + \delta \varphi_j + J_{\varphi_j} + \Delta q'_j + \Delta_{\varphi_j} + \Delta q'''_j, \quad (9)$$

где  $\Delta q''$  – ошибка ввода обобщенной координаты;  $\delta \varphi_j$  – кинематическая погрешность, вызванная неточностью изготовления и сборки передаточных механизмов приводов;  $J_{\varphi_j}$  – мертвый ход;  $\Delta q'_j$  – погрешность, вызванная упругими свойствами (податливостью) передаточных механизмов приводов;  $\Delta_{\varphi_j}$  – погрешность, вызванная податливостью функциональных звеньев исполнительного механизма;  $\Delta q'''$  – зазоры (люфты).

#### Погрешность обобщенной координаты, вызванная податливостью передаточного механизма привода

Звенья передаточных механизмов приводов исполнительного устройства промышленного робота в общем случае не являются абсолютно жесткими. Под действием нагрузок они деформируются. Это приводит к изменению положения функциональных звеньев, то есть возникновению погрешностей обобщенных координат.

Рассмотрим привод исполнительного устройства, состоящий из двигателя, передаточного механизма, имеющего податливость, и функционального звена. От действия внешней силы  $F$  в некоторой степени подвижности возникает обобщенная сила:

$$Q_j = \bar{F} \frac{\partial \bar{r}_M}{\partial q_j} = F_x \frac{\partial x_M}{\partial q_j} + F_y \frac{\partial y_M}{\partial q_j} + F_z \frac{\partial z_M}{\partial q_j}, \quad (10)$$

где  $Q_j$  – обобщенные силы, силы и моменты, развиваемые приводами;  $F$  – внешняя сила;  $M$  – привод звена;  $q_j$  – погрешность обобщенной координаты;  $j$  – номер привода.

Она вызывает деформацию передаточного привода

$$\Delta a'_j = e_j Q_j, \quad (11)$$

где  $\Delta a'_j$  – деформация передаточного привода;  $j$  – номер привода;  $e$  – податливость;  $Q_j$  – обоб-

ценные силы, силы и моменты, развиваемые приводами, и приводит к появлению погрешности обобщенной координаты:

$$\Delta q'_j = \sum_{j=1}^n \Delta a'_j = \sum_{j=1}^n e_j Q_j. \quad (12)$$

Таким образом, точность работы мехатронного модуля определяется его погрешностью, то есть разностью между действительным и расчетным положениями выходного звена.

### Заключение

В результате проведенного исследования движения выходного звена робота рассмотрено влияние кинематической и динамической погрешностей на точность позиционирования выходного звена робота при отработке траектории. Предложенная математическая модель позволяет учитывать погрешность и податливость передаточного механизма приводов звеньев, а также получить более полную картину всего процесса позиционирования выходного звена промышленного робота при заданной траектории движения. Важно иметь в виду, что при этом учитываются все факторы, влияющие на конечное положение выходного звена, которое может повлиять на точность позиционирования выходного звена робота.

### Библиографические ссылки

1. Леянов Б. Н., Шеленок Е. А. Математическая модель многосвязного объекта типа робот-манипулятор // Ученые заметки ТОГУ. 2011. Т. 2, № 1. С. 10–15. URL: [http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2011/TGU\\_2\\_02.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2011/TGU_2_02.pdf) (дата обращения: 08.11.2017).
2. Зубкова Ю. В. Исследование влияния полной погрешности при позиционировании электронного луча в АЭЛТК // Актуальные проблемы машиностроения : материалы Всерос. молодежной интернет-конф. (Владимир, 26–28 апреля, 2011 г.). С. 8–13. ISBN 978-5-93907-061-4.
3. Зубкова Ю. В., Сперанских Т. Н. Исследование погрешности позиционирования выходного звена робота при отработке траектории // Технические университеты: интеграция с европейскими и мировыми системами образования : материалы VII Междунар. конф. (Россия, Ижевск, 21–22 февраля 2017 г.). С. 81–86.
4. Мохов А. Д. Разработка математического и программного обеспечения систем управления мобильными роботами произвольной структуры с избыточными связями. Волгоград, 2014. 65 с. URL: [http://vstu.ru/files/thesis\\_defence/7022/mohov\\_aleksandr\\_dmitrievich.pdf](http://vstu.ru/files/thesis_defence/7022/mohov_aleksandr_dmitrievich.pdf) (дата обращения: 08.11.2017).

5. Зубкова Ю. В., Сперанских Т. Н. Указ. соч.
6. Зубкова Ю. В., Сперанских Т. Н. Там же.
7. Турыгин Ю. В., Зубкова Ю. В. Динамическая составляющая погрешности позиционирования выходного звена мехатронного комплекса // Вестник ИжГТУ. 2012. № 2(54). С. 43–46.
8. Турыгин Ю. В., Зубкова Ю. В. Экспериментальное исследование влияния кинематической погрешности на точность позиционирования выходного звена мехатронного комплекса // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 2(22). С. 100–104.
9. Егоров О. Д., Подураев Ю. В. Конструирование мехатронных модулей : учебник. М. : Станкин, 2004. 264 с.
10. Там же.

### References

1. Lejlanov B. N., SHelenok E. A. (2011). *Uchenye zametki TOGU* [Scientists of the Pacific State University], vol. 2, no. 1, pp. 10-15, available at [http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2011/TGU\\_2\\_02.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2011/TGU_2_02.pdf) (accessed November 8, 2017) (in Russ.).
2. Zubkova J. V. (2011). *Issledovanie vlijaniya polnoj pogreshnosti pri pozicionirovanii jelektronnogo луча v AJELTK* [Investigation of the influence of the total error in the positioning of the electron beam in the AELTK]. Proceedings of the *Aktual'nye problemy mashinostroeniya*, pp. 8-13 (in Russ.).
3. Zubkova J. V., Speranskikh T. N. (2017). *Issledovanie pogreshnosti pozicionirovaniya vyhodnogo звена робота pri otrabotke traektorii* [Investigation of the error of positioning of the output link of the robot during trajectory testing]. Proceedings of the *Tekhnicheskie universitety: integratsiya s evropeiskimi i mirovymi sistemami obrazovaniya*, pp. 81-86 (in Russ.).
4. Mokhov A. D. (2014). *Razrabotka matematicheskogo i programmnoho obespecheniya sistem upravleniya mobil'nymi robotami proizvol'noi struktury s izbytochnymi svyazyami*. [Development of mathematical and software for control systems of mobile robots of arbitrary structure with redundant connections], available at [http://vstu.ru/files/thesis\\_defence/7022/mohov\\_aleksandr\\_dmitrievich.pdf](http://vstu.ru/files/thesis_defence/7022/mohov_aleksandr_dmitrievich.pdf) (accessed November 8, 2017) (in Russ.).
5. Zubkova J. V., Speranskikh T. N. (2017). Op. cit.
6. Ibid.
7. Turygin Yu. V., Zubkova J. V. (2012). *Vestnik IzhGTU* [Bulletin IzhSTU], no. 2, pp. 43-46 (in Russ.).
8. Turygin Yu. V., Zubkova J. V. (2013). *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve* [Intelligent systems in production], no.2, pp. 100-104 (in Russ.).
9. Egorov O. V., Poduraev Ju. V. (2004). *Konstruirovaniye mehatronnyh modulej* [Cogitans moduli Mechatronic]. Moscow: Stankin (in Russ.)
10. Ibid.