

УДК 621.833.38

DOI 10.22213/2413-1172-2018-2-24-30

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СПИРОИДНОЙ ПЕРЕДАЧИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПИКОВОЙ НАГРУЗКИ

А. М. Санников, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Рассмотрена задача анализа тяжело нагруженной низкоскоростной многопарной спиройдной передачи с учетом влияния упругого контактного, изгибно-сдвигового и упругопластического контактного взаимодействия зубьев колеса и витков спиройдного червяка. Обоснован отказ от метода конечных элементов (МКЭ), обычно широко применяемого для решения задач нагруженного контакта. Задача анализа упругопластически нагруженной передачи рассмотрена как комбинация для двух задач: традиционного анализа упругонагруженного контакта и синтеза – поиска требуемой геометрии пластически деформированных поверхностей спиройдной передачи. Приводится разработанный алгоритм расчета распределения нагрузки с учетом упругого и упругопластического характера контакта, многопарности и наличия макронеровностей на контактирующих поверхностях спиройдной передачи. Описаны допущения, принятые при разработке алгоритма. Дано описание выбора допустимого контактного напряжения, которое учитывает сложный геометрический профиль контактных поверхностей. Приводятся числовые примеры, полученные в результате работы предложенного алгоритма, представленные в виде графиков, демонстрирующие его работоспособность и наглядность получаемых результатов. Представлены материалы по эксплуатации тяжело нагруженных низкоскоростных спиройдных передач, подтверждающие достоверность получаемых результатов предложенного алгоритма. Даны рекомендации по локализации контакта на рабочих поверхностях спиройдной передачи.

Ключевые слова: LTCA, спиройдная передача, нагруженный контакт, пластическое смятие.

Введение

Применение инженерных методик для оценки напряженно-деформированного состояния весьма затруднительно, поскольку спиройдное зацепление имеет пространственное многопарное зацепление со сложной геометрией рабочих поверхностей [1]. Пожалуй, самым распространенным методом анализа напряженно-деформированного состояния является метод конечных элементов (МКЭ), но он обладает рядом существенных недостатков:

– ростом погрешностей вычислений при оценке напряжений на относительно негладко сопряженных переходных участках зубьев у их оснований;

– резким возрастанием вычислительной сложности для случая многопарного контакта;

Кроме того, использование распространенных в практике подобных расчетов КЭ-программ подразумевает преобразования форматов файлов с данными о нагружаемых объектах, что вносит в расчет дополнительную погрешность.

Также распространение получили восходящие к работам К. И. Заблонского [2], Г. И. Шевелевой [3, 4], Э. Л. Айрапетова [5] методы анализа нагруженного зубчатого зацепления, которые сводятся к многократному решению

системы линейных уравнений, описывающих условия совместности перемещений точек контактирующих поверхностей. Эти методы легли в основу предложенного нами метода расчета напряженно-деформированного состояния многопарной зубчатой передачи при действии пиковой нагрузки.

Модель упругопластически нагруженного контакта

Наиболее опасным с точки зрения поломки зубьев является приложение перегрузочного вращающего момента, кратно превышающего номинальный момент, например, в момент «сухого» старта передачи под нагрузкой, после чего вращающий момент резко снижается до номинального. При этом на рабочих поверхностях спиройдной передачи появляются участки смятия (рис. 1). Данные участки напоминают по своей форме мгновенные площадки контакта, только, безусловно, меньших размеров. Они искажают исходную геометрию, причем в отличие от износа и смятия поверхностей, возникающих при приработке передачи, не выравнивают нагрузку в зацеплении, а напротив, могут привести к ее концентрации в соседних с перегруженной фазах зацепления и негладности работы передачи. Кроме того, при значительной величине пластической деформации возможно обра-

зование зон предразрушения зубьев, обусловленное ограниченностью пластичности материала. Для оценки этого явления разработан метод расчета с учетом специфики спироидного зацепления.

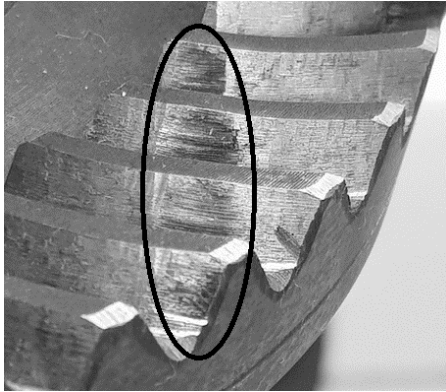


Рис. 1. Площадки смятия на зубьях колеса

В нашей модели приняты следующие допущения:

- рассматривается уровень нагружения, когда контактное смятие на площадке контакта появилось и не продолжается (а не случай сверхнагружения, когда пластическая деформация прогрессирует до поломки зуба);

- не учитывается влияние микронеровностей (Ra 1,6...0,8) на рабочих поверхностях передачи ввиду их малого влияния.

Предлагаемая в настоящей статье модель основана на модели анализа упругого нагруженного контакта, разработанной Е. С. Трубачевым и А. С. Кузнецовым и изложенной в работах [6, 7]. Перед анализом найдено исходное положение звеньев передачи (с учетом погрешностей), при котором зазор между зубьями в какой-либо точке или каких-либо точках равен нулю. В остальных точках боковых поверхностей имеется зазор S_0 , больший нуля. В дискретизированном представлении многократно статически неопределимой системы с односторонними связями для ячеек боковых поверхностей зубьев, участвующих в передаче нагрузки, должны выполняться условия

$$\begin{cases} \sum_D F_{k'm'} v_{kmk'm'} + S_{0km} - \Delta_{\varphi 2km} = 0, \\ \sum_D F_{k'm'} \tilde{r}_{k'm'} - T_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где S_{0km} – исходный (до приложения нагрузки) зазор между km -ми ячейками поверхностей в положении звеньев, когда в одной из ячеек зазор равен нулю; $v_{kmk'm'}$ – значение функции влияния, определяющее перемещение в km -х

ячейках поверхностей при приложении единичной нагрузки в $k'm'$ -х ячейках; $\Delta_{\varphi 2km}$ – относительное перемещение km -х ячеек в результате сближения звеньев при нагружении передачи; $\tilde{r}_{k'm'}$ – плечо действия силы $F_{k'm'}$, приложенной в $k'm'$ -м узле, относительно оси колеса. Первые km уравнений системы (1) есть условия совместности перемещений точек контактирующих участков зубьев, последнее уравнение – уравнение равновесия моментов, развиваемых силами, приложенных в ячейках, и внешнего момента T_2 , приложенного к колесу передачи.

Решение (1) находится по следующему итерационному алгоритму (с уточнением сближения звеньев, области контакта и величины приложенных сил).

1) *Задается величина первоначального сближения звеньев $\Delta_{\varphi 2}^{(n)} = \Delta_{\varphi 2}^{(1)}$ (здесь и далее по ходу изложения алгоритма n – номер итерации). В результате этого образуется область $D^{(1)}$ с внедрением зубьев друг в друга.*

2) *В указанной области определяется нулевое приближение дискретно приложенных сил $F_{km}^{(n)} = F_{km}^{(1)}$ с учетом условия равновесия сил пропорционально образовавшимся внедрениям $S_{0km} - \Delta_{\varphi 2km}^{(1)}$ следующим образом:*

$$f_{km}^{(1)} = S_{0km} - \Delta_{\varphi 2km}^{(1)}; \quad (2)$$

$$F_{km}^{(1)} = T_2 f_{km}^{(1)} / \sum_D f_{km}^{(1)} \tilde{r}_{2km}. \quad (3)$$

Последующие шаги алгоритма относятся как к первой, так и ко всем последующим n -м итерациям.

3) *Область D разделяется (рис. 2):*

- на ячейки первого типа, в которых напряжения настолько велики, что контактное смятие охватывает эти ячейки целиком:

$$\sigma_{h km}^n \geq [\sigma_h], \quad (4)$$

где $\sigma_{h km}^n$ – контактное напряжение km -й ячейки, МПа; $[\sigma_h]$ – допустимое контактное напряжение, МПа;

- ячейки второго типа, где происходит упругое деформирование;

- ячейки третьего типа, где нет контакта.

Поскольку на первых итерациях величина первоначального сближения «произвольна», шаг 3 на первых итерациях опускается; ниже данный вопрос рассмотрим подробнее.

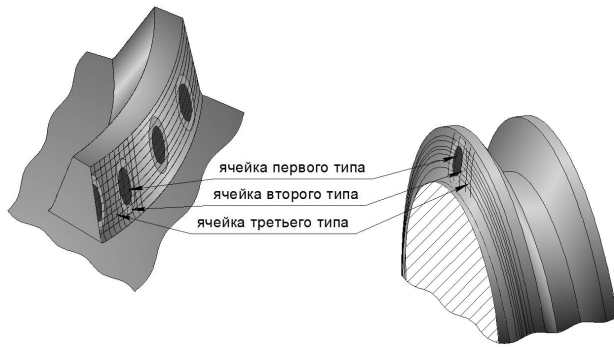


Рис. 2. Положение ячеек на рабочей поверхности передачи

4) Определяются упругие w_{km} , пластические w_{pkm} перемещения точек в результате приложения сил и соответствующие им невязки ξ_{km} первых kt уравнений системы (1):

$$w_{km} = \sum_D F_{k'm'} (v_{1kmk'm'} + v_{2kmk'm'}) = \sum_D F_{k'm'} v_{kmk'm'}; \quad (5)$$

$$w_{pkm}^{(n+1)} = w_{km}^{(n-1)} \left(1 - k \left(\frac{[\sigma_h]}{\sigma_{hkm}^{(n)}} \right) \right); \quad (6)$$

$$w_{pkm}^{(n+1)} = w_{pkm}^{(n)} - \Delta w_{pkm}^{(n+1)}, \quad (7)$$

где $\Delta w_{pkm}^{(n+1)}$ – поправка для пластического перемещения;

$$\xi_{km}^{(n)} = w_{km}^{(n)} + S_{0km} - \Delta_{\varphi 2km}^{(n)}. \quad (8)$$

Пластические перемещения в kt -й ячейке определяются первый раз по формуле (7) на n -й и, как было сказано выше, не первой итерации. В дальнейшем величина пластического перемещения редактируется по величине значения невязок. При этом если пластическое перемещение в kt -й ячейке становится отрицательным, то данная ячейка становится ячейкой второго типа, а пластическое перемещение приравнивается нулю.

Сила в kt -й ячейке первого типа приравнивается допустимой, рассчитанной в зависимости от допустимого контактного напряжения.

5) Определяется средняя величина невязок в области D , приведенная к углу поворота колеса:

$$\xi_{cp}^{(n)} = \frac{1}{I} \sum_D \xi_{km}^{(n)} / r_{2km}. \quad (9)$$

6) Выбранная величина сближения $\Delta_{\varphi 2}^{(n)}$ для следующей $(n + 1)$ -й итерации корректируется на величину средней невязки:

$$\Delta_{\varphi 2}^{(n+1)} = \Delta_{\varphi 2}^{(n)} + \xi_{cp}^{(n)}. \quad (10)$$

7) Невязки ξ_{km} корректируются при новой величине сближения $\Delta_{\varphi 2}^{(n+1)}$;

$$\begin{aligned} \xi_{km}^{(n)} &= S_{0km} + w_{km}^{(n)} + w_{pkm}^{(n)} - \Delta_{\varphi 2km}^{(n+1)} = \\ &= \xi_{km}^{(n)} - \xi_{cp}^{(n)} r_{2km}. \end{aligned} \quad (11)$$

8) Корректируется область D (число kt уравнений системы (1)).

После коррекции величины сближения (11) к области D нужно добавить те ячейки из ненагруженных на n -й итерации, для которых $\xi_{km}^{(n)} < 0$.

9) Определяются поправки $\Delta F_{km}^{(n+1)}$ к дискретно приложенным силам:

– в ячейках 1-го типа величина поправки дискретно приложенной силы равна нулю;

– в ячейках второго типа величина поправки дискретно приложенной силы определяется в зависимости от значения невязок, описание и обоснование данного подхода подробно изложено в работе [8].

10) Определяются значения сил на следующей итерации:

$$f_{km}^{(n+1)} = F_{km}^{(n)} + \Delta F_{km}^{(n+1)}. \quad (12)$$

11) Вновь корректируется область D (число kt уравнений системы (1)).

Из нее исключаются ячейки с отрицательными значениями $f_{km}^{(n+1)}$, для оставшихся ячеек значения сил корректируются из условия их равновесия:

$$\begin{aligned} F_{km}^{(n+1)} &= (T_2 - T_{2p}) \times \\ &\times f_{km}^{(n+1)} / \sum_D (f_{km}^{(n+1)} - f_{pkm}^{(n+1)}) \check{r}_{2km}. \end{aligned} \quad (13)$$

Так же, как и для шага 9, в ячейках первого типа не происходит изменения значения силы.

12) Проверка условия достижения величины коррекции сил (шаг 9) заданной допустимой малой величины. При отрицательном результате производится возврат на шаг № 3, на котором проверяется, изменился ли тип ячейки в результате изменения сближения звеньев.

Конец алгоритма.

Обратимся теперь к вопросу об определении допустимого контактного напряжения и какой коэффициент запаса при этом учитывать. В работах [9, 10] рассмотрен вопрос об определении нормальных напряжений для контактирующих твердых тел различной начальной формы. Показано, что при вдавливании в идеальное жесткопластическое полупространство цилиндриче-

ского пуансона с плоской подошвой и произвольной выпуклой односвязной формой контура в плане контактное напряжение изменяется в интервале 2,571...2,97 от предела текучести (σ_t), а для поверхностей свободной формы приведены уточняющие зависимости.

Величину предела текучести можно взять в стандарте на материал или провести самостоятельные испытания конкретного образца. Также можно воспользоваться статистическими формулами, позволяющими определить предел текучести в зависимости от твердости материала. Подобный подход, например, описан в работе [10].

При корректировке пластического перемещения в km -й ячейке очевидно, что, как и для корректировки сил, в этом случае необходимо использовать имеющиеся на данный момент значения невязок. Но на первых итерациях значение невязки велико и в зависимости от уровня нагружения передачи может достигать 1 мм и более, что значительно больше того уровня пластических перемещений, который, по нашему мнению, не должен быть превышен для нормальной работы передачи. По этой причине мы начинаем корректировать пластическое перемещение с итераций, в которых невязки не превышают некоторой заданной величины (например, по опыту расчета спироидных передач со стальными закаленными колесами и червяками это разумно делать при средней невязке около 2×10^{-6} радиана, что для передач средних размеров соответствует ≈ 1 мкм). Что касается зависимости для расчета величины корректировки, мы предлагаем использовать следующую:

$$\Delta w_{pkm}^{(n+1)} = k_p \frac{(\xi_{cp}^n + \xi_{km}^m)}{2},$$

где k_p – коэффициент, учитывающий влияние упругой составляющей в невязке.

На рис. 3–6 в качестве примера, демонстрирующего работоспособность алгоритма, приведены результаты расчета нагруженности передачи с параметрами, приведенными в таблице, при нагрузочном моменте 5000 Нм и допустимом уровне контактных напряжений 2000 МПа. Расчет выполнялся при нагружении правой поверхности колеса. В частности показаны графики распределения пластического перемещения ячеек в участках смятия, полученного в одной фазе зацепления и условно спроецированного на поверхность одного зуба спироидного колеса, для случаев:

- сопряженного контакта в отсутствии погрешностей (рис. 3);
- сопряженного контакта при учете повышенной податливости узлов колеса и червяка (соответствует погрешности межосевого угла в передаче 0,1/30) (рис. 4);
- контакта, локализованного по высоте и длине зуба (рис. 5);
- контакта, локализованного по высоте и длине зуба при учете макронеровностей (огранки) на поверхности колеса высотой до 20 мкм (рис. 6).

Основные параметры тестовой передачи

Межосевое расстояние, мм	60
Осевой модуль червяка, мм	2,75
Передаточное число	46 : 1
Наружный диаметр червяка, мм	42
Внешний / внутренний диаметры колеса, мм	175 / 138
Коэффициенты высоты головки / ножки	1 / 1,2
Углы профиля правой / левой	10° / 30°

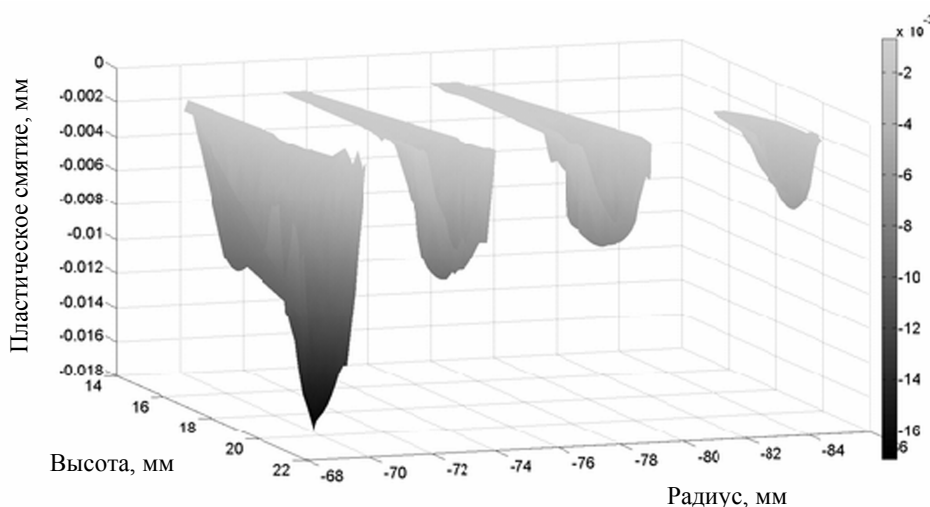


Рис. 3. Площадки смятия при сопряженном контакте

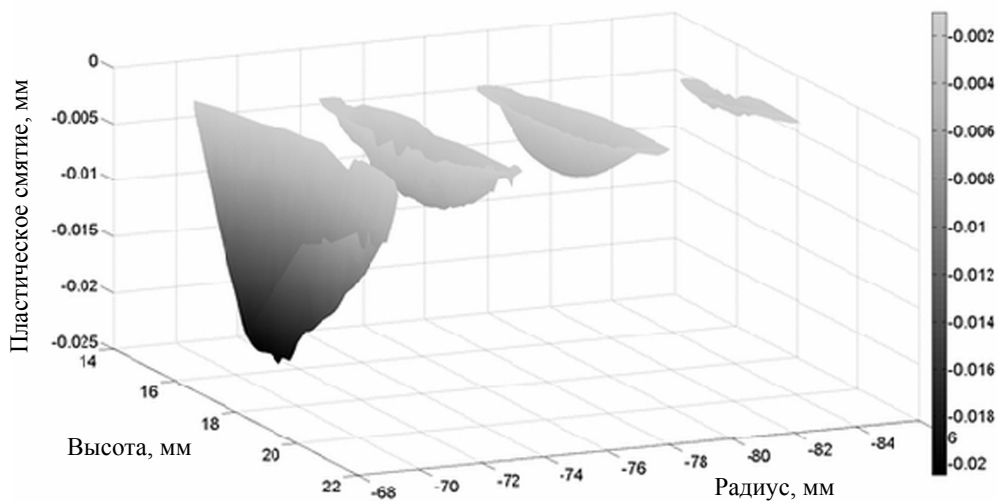


Рис. 4. Площадки смятия при сопряженном контакте при учете повышенной податливости узлов колеса и червяка

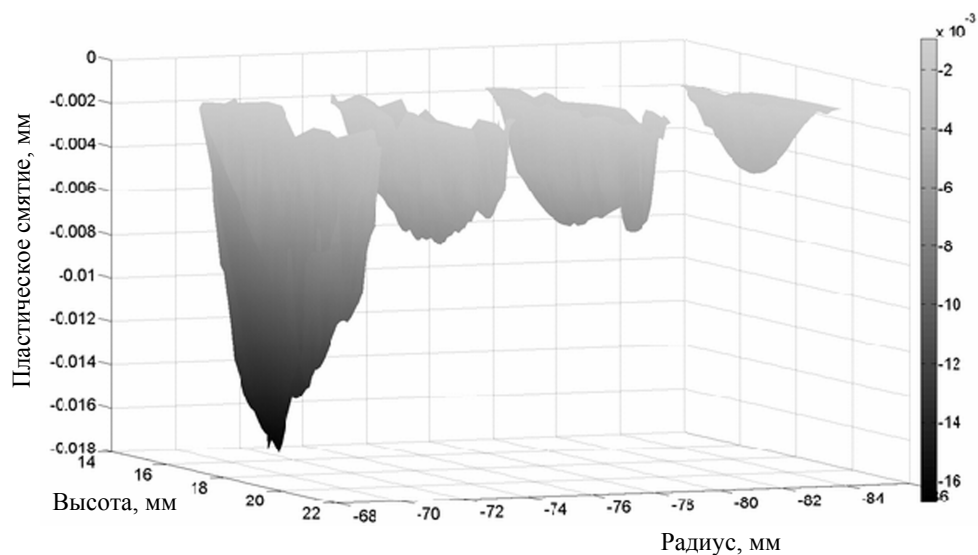


Рис. 5. Площадки смятия при локализованном контакте

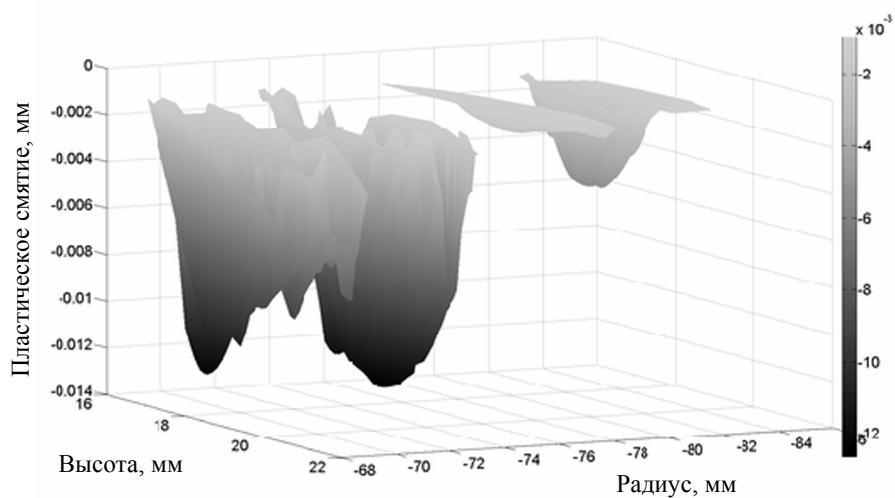


Рис. 6. Площадки смятия при локализованном контакте и макронеровностях

Как можно заметить из рисунков, в каждом варианте по длине зуба площадки смятия имеют различную форму и глубину, что объясняется неравномерностью распределения нагрузки между зубьями в многопарном зацеплении и различной степенью податливости участков зуба колеса и червяка.

При этом неизменным остается высокий уровень смятия на носке (в других фазах контакта пятке) зуба колеса, что можно объяснить меньшей площадью контакта на крае зуба колеса при сопоставимом уровне нагружения контактируемых площадок по всему зубу. Эта ситуация усугубляется при появлении погрешностей изготовления и монтажа (рис. 6) из-за концентрации нагрузки в этой области и вызывать поломку (рис. 7). Введение локализации контакта позволит значительно улучшить ситуацию и более равномерно распределить нагрузку по всему зубу колеса.

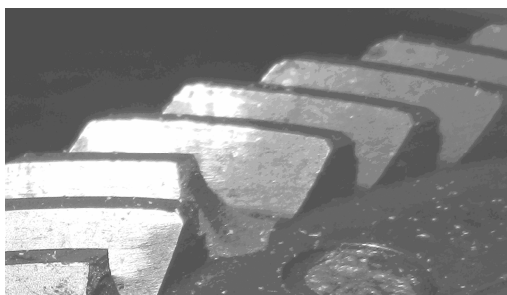


Рис. 7. Поломка носка зуба колеса

Предложенный алгоритм позволит учитывать появление макронеровностей (огранки), при которых величина наибольшего смятия сосредоточена на их вершинах. При последующей эксплуатации передачи происходит примятие выступов (рис. 8), что во многом является положительным явлением. Предложенный алгоритм в первую очередь ориентирован на статическое нагружение, но он может стать и основой более общего алгоритма анализа упругопластического контакта, распространяющегося по зубьям.



Рис. 8. Смятие макронеровностей

Для этого необходимо аппроксимировать мгновенные площадки смятия в различных фазах и получить общую картину смятия по всей поверхности передачи (рис. 9).

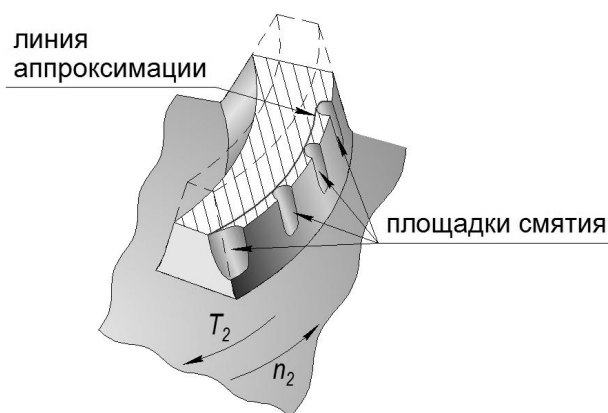


Рис. 9. Аппроксимация мгновенных площадок смятия

Выводы

Таким образом, приведенные в статье алгоритмы расчета распределения нагрузки в многопарном спироидном зацеплении позволяют оценить область смятия и ее величину на рабочей поверхности спироидного колеса и червяка при воздействии пиковой нагрузки в любой произвольной фазе работы передачи. Данные результаты расчета при соотношении их с данными эксплуатации спироидных передач позволят разработать рекомендации по выбору допустимых пиковых нагрузок.

Библиографические ссылки

1. Георгиев А. К. Основные особенности, классификация и область эффективного использования спироидных передач // Перспективы развития и использования спироидных передач и редукторов : доклад всесоюзного научно-технического совещания. Ижевск, 1979. С. 3–9.
2. Заблонский К. И. Зубчатые передачи. Распределение нагрузки в зацеплении. Киев: Техніка, 1977. 208 с.
3. Шевелева Г. И. Численный метод решения контактной задачи при сжатии упругих тел // Машиноведение. 1981. № 5. С. 90–94.
4. Шевелева Г. И. Решение контактной задачи методом последовательного нагружения // Известия вузов. 1986. № 9. С. 10–15.
5. Айрапетов Э. Л., Генкин М. Д. Статика планетарных механизмов. М. : Наука, 1976. 263 с.
6. Трубачев Е. С. Основы анализа зацепления реальных спироидных передач // Вестник машиностроения. 2004. № 10.
7. Кузнецов А. С. Теоретическое и экспериментальное исследование статической нагруженности

спироидной передачи : дис. ... канд. техн. наук. Ижевск, 2005. 186 с.

8. Trubachev E., Kuznetsov A., Sannikov A. Model of Loaded Contact in Multi-pair Gears // *Mechanisms and Machine Science 51*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2018, pp. 45-72. ISBN 978-3-319-60398-8, DOI 10.1007/978-3-319-60399-5.

9. Третьяков Е. М. Методика расчета твердых тел на контактную прочность по предельным контактными нагрузкам // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2012. № 4. С. 98–124.

10. Особенности расчетов на контактную прочность высоконагруженных поверхностно-упрочненных зубчатых передач трансмиссий и приводов / Е. И. Тескер, С. Е. Тескер, В. Ю. Тараненко, В. В. Елхов // Проблемы механики современных машин : материалы VI Междунар. конф. (отв. ред. В. С. Балбаров). Восточно-Сибирский гос. ун-т технологий и управления, 2015. С. 123–128.

11. Дель Г. Д. Определение напряжений в пластической области по распределению твердости. М. : Машиностроение, 1971. 199 с.

References

1. Georgiev A. K. (1979). *Osnovnye osobennosti, klassifikacija i oblast' jeffektivnogo ispol'zovanija spiroidnyh peredach* [Basic features, classification and area of effective application of spiroid gears]. Proceedings of the all-Russian scientific technical meeting, pp. 3-9. Izhevsk (in Russ.).

2. Zablonskiy K. I. (1977). *Zubchatye peredachi. Raspredelenie nagruzki v zaceplenii* [Gears. Load distribution in gearing]. Kiev: Tekhnika (in Russ.).

3. Sheveleva G. I. (1981). *Chislennyi metod resheniya kontaktnoi zadachi pri szhatii uprugikh tel* [Numerical method of solving the contact problem at compression of elastic solids]. *Mashinovedeniye* [Machine Science], no. 5, pp. 90-94 (in Russ.).

4. Sheveleva G. I. (1986). *Reshenie kontaktnoj zadachi metodom posledovatel'nogo nagruzheniya* [Solving

the contact problem by consequent loading], *Izvestiya VUZov* [Proceedings of the universities], no. 9, pp. 10-15 (in Russ.).

5. Airapetov E. L., Genkin M. D. (1976). *Statika planetarnykh mehanizmov* [Statics of planetary mechanisms], Moscow: Nauka (in Russ.).

6. Trubachev E. S. (2004). *Osnovy analiza zacepleniya real'nykh spiroidnykh peredach* [Fundamentals of analysis of meshing of real spiroid gears]. *Vestnik mashinostroyeniya* [Bulletin of Machine Building], no. 10 (in Russ.).

7. Kuznetsov A. S. (2005). *Teoreticheskoe i jeksperimental'noe issledovanie staticheskoy nagruzhennosti spiroidnoj peredachi* [Theoretical and experimental investigation of static loading state of spiroid gears]: PhD thesis. Izhevsk (in Russ.).

8. Trubachev E., Kuznetsov A., Sannikov A. Model of Loaded Contact in Multi-pair Gears. *Mechanisms and Machine Science 51*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2018, pp. 45-72. ISBN 978-3-319-60398-8, DOI 10.1007/978-3-319-60399-5.

9. Tretyakov E. M. (2012). *Metodika rascheta tverdykh tel na kontaktnuju prochnost' po predel'nykh kontaktnym nagruzkam* [Technique for contact strength analysis of solids in accordance with ultimate contact loads]. *Vestnik MGTU imeni N. E. Baumana* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering], no. 4, pp. 98-124 (in Russ.).

10. Tesker E. I., Tesker S. E., Taranenko V. Yu., Elkhov V. V. (2015). *Osobennosti raschetov na kontaktnuju prochnost' vysokonagruzhennykh poverhnostno-uprochnennykh zubchatykh peredach transmisiy i privodov* [Features of contact strength analysis of heavy-loaded surface hardened gears of transmissions and drives]. Proceedings of the Problems of mechanics of advanced machine (ed. V. S. Balбаров), pp. 123-128 (in Russ.).

11. Del' G. D. (1971). *Opredelenie naprjazhenij v plasticheskoy oblasti po raspredeleniju tverdosti* [Determination of stresses in plastic area in accordance with hardness distribution], Moscow: Mashinostroyeniye (in Russ.).

Analysis of Mode of Deformation for Spiroid Gears under Peak Loads

A. M. Sannikov, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The paper describes the analysis of heavy-loaded low-speed multi-pair spiroid gears under the effect of elastic contact, bending and shearing, and elastoplastic contact interaction of gearwheel teeth and worm threads. Rejection from the finite-element method widely used for solving the problems of loaded tooth contact is substantiated. Analysis of elastically and plastically loaded gears is considered as the set of two problems: traditional analysis of the elastically loaded contact and synthesis, that is, the search for the required geometry of plastically deformed surfaces of spiroid gears. The developed algorithm for analysis of load distribution with account of elastic and elastoplastic contact condition, multi-pair contact and macro-roughnesses on contacting surfaces is presented. Allowances taken within the development of the algorithm are described. Choice of the allowable contact stress that considers the complex geometrical profile of contacting surfaces is described. The proposed algorithm allowed for obtaining the numerical results presented as diagrams and demonstrating the workability of the algorithm and the clarity of the obtained results. The presented information on operation of heavy-loaded low-speed spiroid gears proves the veracity of the proposed algorithm. Recommendations on contact localization on work surfaces of spiroid gears are given.

Keywords: LTCA, spiroid gear, loaded contact, plastic crumpling.

Получено 12.04.2018