

УДК 621.833.6+621.01  
DOI 10.22213/2413-1172-2019-1-29-36

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПОВЫШЕННОЙ ПОДАТЛИВОСТИ

И. А. Пушкарев, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*В статье продолжается исследование динамики планетарных передач с элементами повышенной податливости. Основой для расчетной схемы и исходных уравнений является полученная ранее система девяти дифференциальных уравнений динамики планетарного механизма. В обобщенных силах учтены момент двигателя, момент, обусловленный кручением упругого вала солнечной шестерни; упругие силы в зацеплении колес и в осях сателлитов.*

*Допускается, что скорость водила постоянна. Жесткость оси сателлита в тангенциальном направлении значительно превышает жесткость оси в радиальном направлении, поэтому перемещение в тангенциальном направлении отсутствует. Момент двигателя изменяется по гармоническому закону. В этом случае вынужденные колебания солнечной шестерни и сателлита можно рассматривать отдельно от вынужденных колебаний сателлита в радиальном направлении вследствие податливости оси сателлита. Построены амплитудно-частотные характеристики этих колебаний. Характеристики колебательных процессов выражены через массогабаритные, кинематические и прочностные параметры планетарной передачи с учетом податливости ее элементов.*

*Исследовано влияние относительной высоты сечения податливой оси, передаточного отношения механизма и модуля зацепления на амплитуду вынужденных колебаний и положение резонансной области. Сделаны выводы о пределах изменения указанных параметров и их влияния на конструкцию планетарных передач.*

**Ключевые слова:** планетарная передача, податливость элементов, динамика, колебания.

**Введение**

Планетарные передачи находят широкое применение во многих областях техники. Такое свойство планетарной передачи, как многопоточность, дает дополнительные преимущества планетарным передачам перед рядными зубчатыми передачами [1–3]. Продолжаются разработки рациональных конструкций планетарных передач с элементами, обладающими повышенной податливостью [4–6]. Это позволяет снизить неравномерность распределения нагрузки по сателлитам передачи [7–9], но приводит к необходимости исследования дополнительных напряжений в элементах с повышенной податливостью [10], а также возможных колебательных процессов [11–15]. Актуальность задачи возрастает при значительных нагрузках и высоких скоростях вращения [16–18].

В работе [19] планетарный редуктор типа  $k-h-v$  представлен зубчатыми колесами в виде твердых тел (рис. 1), упругие связи между которыми смоделированы пружинами; приводится система дифференциальных уравнений движения планетарной передачи, составленная на основе уравнений Лагранжа второго рода по девяти обобщенным координатам, включающим:

перемещения центра масс сателлита вследствие податливости оси в радиальном  $y_{gi}$  и тангенциальном направлении  $x_{gi}$ ; угол поворота водила  $\varphi_h$ ; относительный угол поворота сателлита  $\varphi_{gi}$  вследствие податливости зубьев; относительный угол поворота шестерни  $\varphi_a$  вследствие податливости вала и зубьев шестерни. Рассмотрены собственные колебания колес вследствие податливости зубьев.

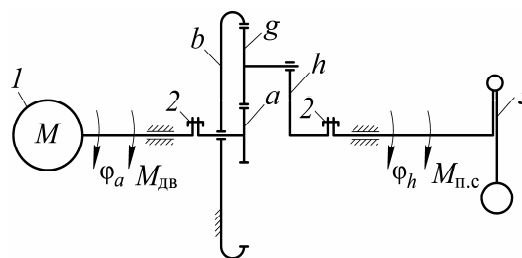


Рис. 1. Привод, содержащий планетарную передачу:  $b$  – неподвижное колесо,  $g$  – сателлит,  $h$  – водило,  $a$  – центральная шестерня,  $1$  – электродвигатель,  $2$  – муфта,  $3$  – исполнительный орган

Fig. 1. The drive containing planetary gear:  $b$  - fixed central gearwheel,  $g$  - satellite,  $h$  - planet carrier,  $a$  - sun gearwheel,  $1$  - electric motor,  $2$  - coupling,  $3$  - actuator

Цель данной работы – исследовать влияние повышенной податливости элементов планетарных передач на вынужденные колебания планетарных передач.

**Упрощение исходных уравнений и исследование вынужденных колебаний системы «солнечная шестерня – спутник»**

В обобщенных силах, как и в общей динамической модели [20], учтены (рис. 2): момент двигателя  $M_{дв}$ ; момент, обусловленный кручением упругого вала солнечной шестерни  $M_a$ ; упругие силы в зацеплении колес. Момент  $M_a = c_a \varphi_a$ , где  $c_a$  – жесткость вала на кручение. Упругие силы

в опорах спутника  $F_{hgy} = c_{hgy} y_g$ . Силы в зацеплении неподвижного колеса  $b$  и спутника  $g$   $F_{nbg} = F_{ngb} = c_{bg} \Delta s_{nbg}$ . Здесь  $c_{hgy}$  и  $c_{bg}$  – жесткости в зацеплении колес.

Поскольку сила  $F_{nbg} = F_{ngb}$  направлена вдоль линии зацепления, расположенной под углом  $\alpha_{gb}$  к оси  $x_g$ , то перемещение, обусловленное податливостью элементов (рис. 3)  $\Delta s_{nbg} = \frac{\varphi_g r_g}{\cos \alpha_{gb}}$ , где  $r_g$  – радиус спутника. Аналогично определяется упругая сила в зацеплении солнечной шестерни  $a$  и спутника  $g$ .

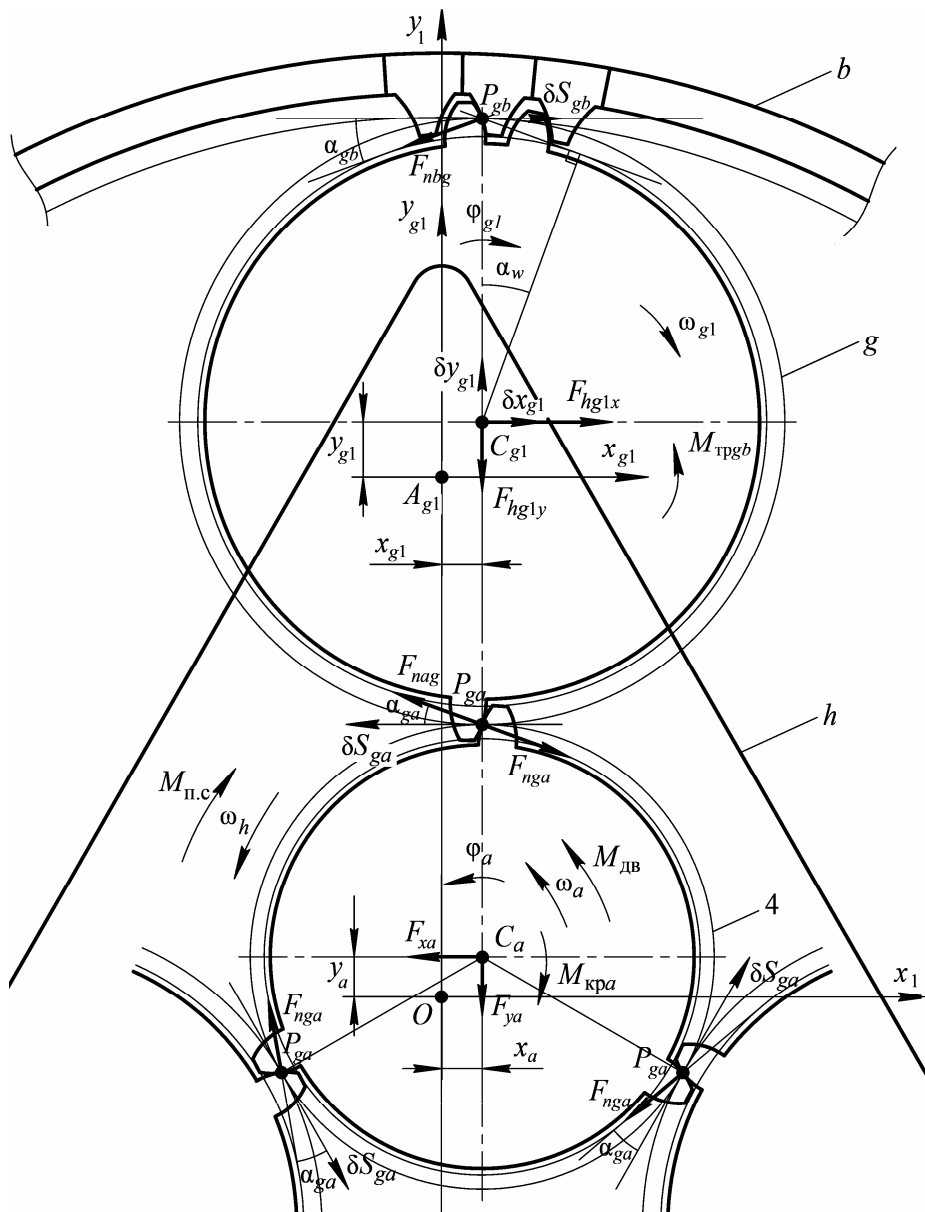


Рис. 2. Расчетная схема с действующими силами

Fig. 2. The design model with operating forces

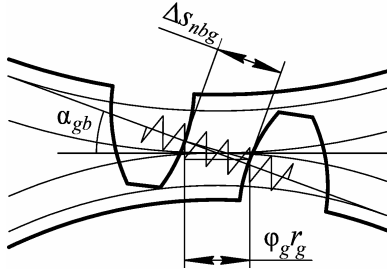


Рис. 3. Зацепление «неподвижное колесо – спутник»  
Fig. 3. Gear meshing “fixed central gearwheel – satellite”

Для исследования вынужденных колебаний планетарного механизма из системы девяти дифференциальных уравнений второго порядка выбраны три по обобщенным координатам  $\varphi_h$ ,  $\varphi_a$  и  $y_{gi}$ :

$$\begin{aligned} I_g \ddot{\varphi}_h i_{hg} + I_g \ddot{\varphi}_g &= \\ &= -M_{mp} - c_{bg} \varphi_g r_g + c_{ga} (\varphi_a r_a - \varphi_g r_g) r_g; \\ I_a \ddot{\varphi}_h i_{ha} + I_a \ddot{\varphi}_a &= \\ &= M_0 \cos pt - c_a \varphi_a - n_w c_{ga} (\varphi_a r_a - \varphi_g r_g) r_a; \\ 2m_g \dot{x}\dot{\varphi}_h + m_g x\ddot{\varphi}_h + m_g \ddot{y}_g - m_g y_g \dot{\varphi}_h^2 &= \\ &= -c_{hgv} y_g - c_{bg} \varphi_g \operatorname{tg} \alpha_{gb} r_g + c_{ga} (\varphi_a r_a - \varphi_g r_g) \operatorname{tg} \alpha_{ga}. \end{aligned}$$

Считается, что скорость  $\omega_h = \dot{\varphi}_h = \text{const}$ . Жесткость оси спутника в тангенциальном направлении значительно превышает жесткость оси в радиальном направлении, поэтому принимается, что перемещение центра масс спутника и его скорость в направлении оси  $x$   $x_g = \dot{x}_g = \ddot{x}_g = 0$ . Момент двигателя  $M_{дв} = M_0 \cos pt$ , где  $p$  – частота вынуждающей силы. Тогда уравнения преобразуются к следующему виду:

$$I_g \ddot{\varphi}_g = -M_{тр} - c_{bg} \varphi_g r_g + c_{ga} (\varphi_a r_a - \varphi_g r_g) r_g; \quad (1)$$

$$I_a \ddot{\varphi}_a = M_0 \cos pt - c_a \varphi_a - n_w c_{ga} (\varphi_a r_a - \varphi_g r_g) r_a; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m_g \ddot{y}_g - m_g y_g \dot{\varphi}_h^2 &= -c_{hgv} y_g - c_{bg} \varphi_g \operatorname{tg} \alpha_{gb} r_g + \\ &+ c_{ga} (\varphi_a r_a - \varphi_g r_g) \operatorname{tg} \alpha_{ga}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $m_g$  – масса спутника;  $I_g$ ,  $I_a$  – моменты инерции спутника и солнечной шестерни;  $n_w$  – число спутников;  $r_a$  – радиус солнечной шестерни;  $i_{gh}$ ,  $i_{ha}$  – передаточные отношения.

При принятых допущениях система уравнений разделяется – первые два уравнения можно

решать независимо от третьего. Частное решение системы уравнений (1), (2) находится в виде  $\varphi_g = A_{\varphi g} \cos pt$ ;  $\varphi_a = A_{\varphi a} \cos pt$ , откуда

$$\begin{aligned} A_{\varphi g} &= \frac{M_0 b_{12}}{(b_{11} - a_{11} p^2)(b_{22} - a_{22} p^2) - b_{12}^2}; \\ A_{\varphi a} &= -\frac{M_0 (b_{11} - a_{11} p^2)}{(b_{11} - a_{11} p^2)(b_{22} - a_{22} p^2) - b_{12}^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_{11} = n_w I_g$ ;  $a_{22} = I_a$ ;  $b_{11} = n_w (c_{bg} + c_{ga}) r_g^2$ ;  $b_{12} = -n_w c_{ga} r_g r_a$ ;  $b_{22} = c_a + n_w c_{ga} r_a^2$ .

Из формул (4) можно определить собственные частоты колебаний системы солнечной шестерни с спутниками, приравняв нулю знаменатель:

$$a_{11} a_{22} k^4 - (b_{11} a_{22} + a_{11} b_{22}) k^2 + (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) = 0.$$

Решение биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 &= \frac{(b_{11} a_{22} + a_{11} b_{22})}{2 a_{11} a_{22}} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{(b_{11} a_{22} + a_{11} b_{22})^2 - 4 a_{11} a_{22} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)}}{2 a_{11} a_{22}}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся соотношениями между массогабаритными характеристиками планетарной передачи [21]:

$$r_g = (0,5i - 1) r_a; \quad m_g = k_g m_a (0,5i - 1)^2;$$

$$m_a = k_a \rho \pi r_a^2 b_w; \quad I_g = \frac{m_g r_g^2}{2} = \frac{k_g m_a (0,5i - 1)^4 r_a^2}{2};$$

$$I_a = \frac{m_a r_a^2}{2}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность;  $b_w$  – ширина венцов зубчатых колес;  $k_g$  – коэффициент заполнения спутника;  $i$  – передаточное отношение механизма.

После подстановки выражений для массовых и упругих коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  с учетом того, что жесткость зубчатых зацеплений  $c_{bg} = c_{ga} = 0,075 E b_w$ ; жесткость вала на кручение  $c_a = G I_p / l_a$ , где  $G = E / [2(1 + \mu)]$  – модуль упругости второго рода,  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $I_p = \pi d_a^4 / 32 = \pi r_a^4 / 2$  – полярный момент инерции сечения вала шестерни,  $l_a$  – длина оси солнечной шестерни, собственные частоты

$$k_{1,2}^2 = \frac{0,15E}{k_a \pi \rho m^2 z_a^2} \left[ \frac{1}{k_g (0,5i-1)^2} + \frac{\pi}{0,6l'_a b'_w (1+\mu)} + n_w \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{k_g (0,5i-1)^2} - \frac{\pi}{0,6l'_a b'_w (1+\mu)} \right]^2 + 0,25n_w^2} \right]$$

Здесь радиус шестерни записан в виде  $r_a = mz_a$ , где  $m$  – модуль зацепления,  $z_a$  – число зубьев шестерни; относительные величины  $l'_a = l_a/r_a$ ;  $b'_w = b_w/r_a$ .

Зная частоты  $k_1$  и  $k_2$ , выражения для амплитуд переписываем в виде

$$A_{\varphi_g} = \frac{M_0 b_{12}}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)};$$

$$A_{\varphi_a} = -\frac{M_0 (b_{11} - a_{11} p^2)}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)},$$

или  $A_{\varphi_a} = \mu A_{\varphi_g}$ . Коэффициент формы  $\mu = -M_0 (b_{11} - a_{11} p^2) / b_{12}$ .

#### Вынужденные колебания спутника с осью повышенной податливости

При подстановке найденных значений  $\varphi_g = A_{\varphi_g} \cos(pt + \gamma)$  и  $\varphi_a = A_{\varphi_a} (\cos pt + \gamma)$  в уравнение (3) находится частное решение:  $y_g = A \cos(pt + \gamma_1)$ . Амплитуда

$$A = -M_0 \left[ (c_{bg} \operatorname{tg} \alpha_{gb} + c_{ga} \operatorname{tg} \alpha_{ga}) r_g b_{12} + c_{ga} r_a \operatorname{tg} \alpha_{ga} (b_{11} - a_{11} p^2) \right] / m_g a_{11} a_{22} (p^2 - k^2)(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2).$$

Здесь  $k^2 = (c_{hgy} / m_g) - \dot{\varphi}_h^2$  – собственная частота колебаний спутника в радиальном направлении, которая определяется в первую очередь жесткостью оси спутника при изгибе  $c_{hgy} = 3EI_x / l^3$ . Сечение оси с повышенной податливостью в первом приближении можно считать прямоугольным (рис. 4). Тогда момент инерции сечения  $I_x = bh^3/12$ , где  $b \approx D$ ,  $h = \chi D$ ,  $\chi$  – доля диаметра;  $I_x = \chi^3 D^4 / 12$ . Диаметр и длина оси выражаются через диаметр спутника:  $D = \bar{D} r_g$ ;  $l_{\text{оси}} = \bar{l}_{\text{оси}} r_g$ . Тогда

$c_{hgy} = \frac{E \chi^3 \bar{D}^4 r_g}{4 \bar{l}_{\text{оси}}^3}$ , и собственная частота колебаний спутника в радиальном направлении

$$k = \sqrt{\frac{E \chi^3 \bar{D}^4}{4 \bar{l}_{\text{оси}}^3 k_g \pi \rho (0,5i-1) b'_w m^2 z_a^2} - \frac{\omega_a^2}{i}}.$$

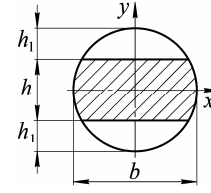


Рис. 4. Сечение податливой оси спутника

Fig. 4. Section of a flexible axles of the satellite

На рис. 5 приведены зависимости собственной частоты колебаний спутника в радиальном направлении при разных значениях входных величин. Графики соответствуют следующим значениям величин:  $[\sigma_F] = 550$  МПа,  $\bar{D} = 1$ ,  $\bar{l}_{\text{оси}} = 2$ ,  $b'_w = 2$ ,  $z_a = 18$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $k_g = 0,8$ ,  $\omega_a = 100$  рад/с.

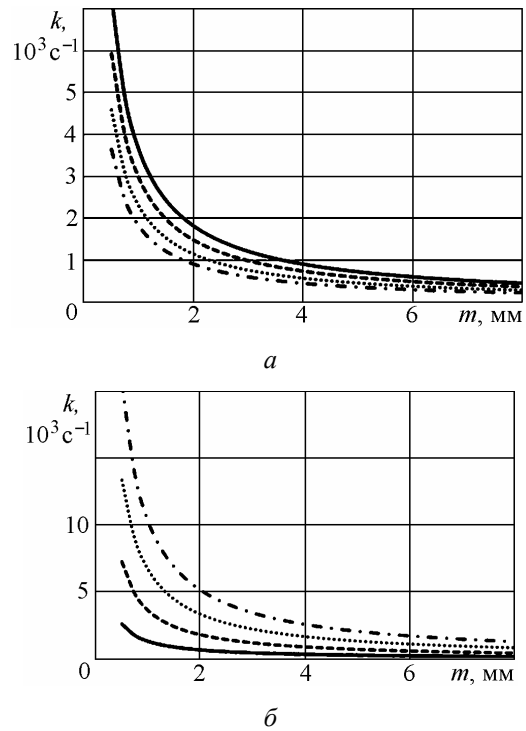


Рис. 5. Зависимость собственной частоты колебаний спутника в радиальном направлении от модуля  $m$  и от передаточного отношения  $i$ : (а) — — — —  $i = 4$ , — — — —  $i = 5$ , ..... —  $i = 7$ , — · — · —  $i = 10$ ; от относительной высоты сечения податливой оси  $\chi$  (б): — — — —  $\chi = 0,25$ , — — — —  $\chi = 0,5$ , ..... —  $\chi = 0,75$ , — · — · —  $\chi = 1$

Fig. 5. Dependence of natural frequency of vibrations of the satellite in the radial direction from module  $m$  and from the gear ratio  $i$ : (а) — — — —  $i = 4$ , — — — —  $i = 5$ , ..... —  $i = 7$ , — · — · —  $i = 10$ ; from the relative height of section of a flexible axles  $\chi$  (б): — — — —  $\chi = 0,25$ , — — — —  $\chi = 0,5$ , ..... —  $\chi = 0,75$ , — · — · —  $\chi = 1$

Момент на валу солнечной шестерни  $M = M_0 \cos pt$ ,  $M_0 = M_h/i$ . Из известной зависимости расчета зубьев на изгибную прочность допускаемый момент  $[M_h]$  на валу водила

$$[M_h] = \frac{2[\sigma_F] a_w n_w b_w m}{Y_F K_F}, \text{ где } a_w = 0,5i r_a - \text{ межосевое расстояние; } Y_F - \text{ коэффициент формы зуба; } K_F - \text{ коэффициент неравномерности распределения нагрузки в зацеплениях колес [22]; } [\sigma_F] - \text{ допускаемые напряжения изгиба зуба.}$$

После подстановки жесткостей зубчатых зацеплений  $c_{bg} = c_{ga} = 0,075Eb_w$ , выражений для коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и момента  $M_0$ , амплитуда

$$A = -\frac{Xp^2}{(k^2 - p^2)(k_1^2 - p^2)(k_2^2 - p^2)},$$

где

$$X = \frac{0,15E[\sigma_F] \operatorname{tg} \alpha}{Y_F K_F k_g k_a \pi^2 \rho^2} \frac{n_w}{m^3 z_a^4} \frac{1}{(0,5i - 1)^2}.$$

Изменение параметра  $X$ , характеризующего часть амплитуды колебаний сателлита, не зависящую от собственных и вынужденных частот, приведено на рис. 6.

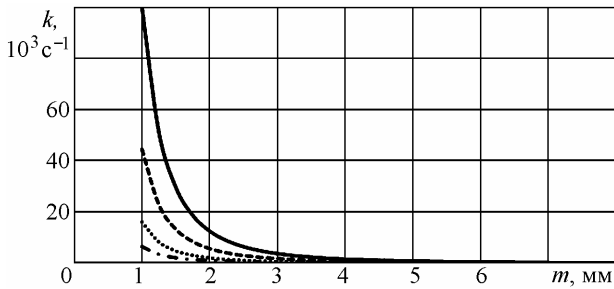


Рис. 6. Изменение параметра  $X$  в зависимости от модуля  $m$  и передаточного отношения  $i$ : — — — —  $i = 4$ , - - - -  $i = 5$ , .....  $i = 7$ , - · - ·  $i = 10$

Fig. 6. Change of parameter  $X$  depending on module  $m$  and the gear ratio  $i$ : — — — —  $i = 4$ , - - - -  $i = 5$ , .....  $i = 7$ , - · - ·  $i = 10$

Амплитудно-частотная характеристика колебаний планетарного механизма приведена на рис. 7. Графики соответствуют следующим значениям величин:  $[\sigma_F] = 550$  МПа,  $n_w = 3$ ,  $m = 2$ ,  $Y_F = 3,75$ ,  $K_F = 1$ ,  $l'_a = 4$ ,  $b'_w = 2$ ,  $z_a = 18$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $k_g = 0,8$ ,  $k_a = 1$ ,  $i = 4$ ,  $\omega_a = 100$  рад/с.

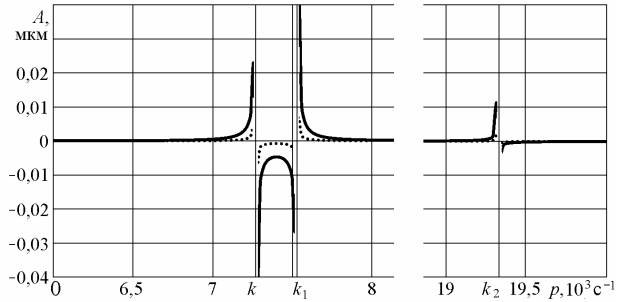


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика колебаний сателлита в радиальном направлении в зависимости от передаточного отношения  $i$ : — — — —  $i = 4$ , .....  $i = 7$

Fig. 7. An amplitude-frequency characteristic of vibrations of the satellite in the radial direction depending on the gear ratio  $i$ : — — — —  $i = 4$ , .....  $i = 7$

### Анализ результатов

Особенности расчетной схемы и принятых допущений позволили разделить анализ вынужденных колебаний планетарного механизма на исследование двух независимых систем: вынужденные колебания солнечной шестерни и сателлита вследствие податливости зубьев и вынужденные колебания сателлита в радиальном направлении вследствие податливости оси сателлита.

Амплитудно-частотная характеристика солнечной шестерни и сателлита свидетельствует о том, что в диапазоне массогабаритных характеристик и передаточных чисел планетарных механизмов, чаще всего встречающихся на практике, возрастание амплитуды вынужденных колебаний этой системы возможно только при значительной величине частоты вынуждающей силы, причем первая частота находится в районе 7000 рад/с, а вторая – 19000 рад/с. В связи с этим учет вынужденных колебаний в планетарных передачах данной схемы может быть актуален только в некоторых высокоскоростных передачах.

Податливость оси сателлита значительно сказывается на собственной частоте и амплитуде вынужденных колебаний. Так, проведенные расчеты и графики свидетельствуют о том, что уменьшение относительной высоты сечения податливой оси  $\chi$  от 1 до 0,5 снижает собственную частоту колебаний сателлита в радиальном направлении примерно в три раза, что увеличивает вероятность резонансных явлений.

Увеличение передаточного отношения механизма с податливой осью сателлита также уменьшает собственную частоту колебаний сателлита, но в меньшей степени. Так, увеличение

передаточного отношения с 4 до 10 приводит к уменьшению собственной частоты примерно в два раза.

Наиболее сильно на собственную частоту сателлита с податливой осью оказывает увеличение модуля зацепления. Увеличение модуля зацепления в два раза приводит примерно к двукратному уменьшению собственной частоты.

Амплитудно-частотная характеристика сателлита с податливой осью указывает на увеличение амплитуд вблизи резонансных областей при уменьшении передаточного числа передачи. При увеличении передаточного отношения до 7 наблюдается резкое уменьшение амплитуд вблизи резонансных областей и в области между первой и второй частотами.

### Выводы

Возрастание амплитуды вынужденных колебаний планетарных передач с элементами повышенной податливости возможно при высокой частоте вынуждающей силы. Вероятность появления резонансных явлений возрастает при уменьшении высоты сечения податливой оси сателлита в радиальном направлении, но нехарактерно для большинства планетарных передач, используемых на практике.

С увеличением передаточного отношения амплитуда вблизи резонансных областей резко уменьшается. В то же время при увеличении передаточного отношения уменьшается значение собственной частоты сателлита с податливой осью, что уменьшает значение резонансных частот. С увеличением модуля зацеплений и, следовательно, диаметров колес опасность резонансных явлений возрастает.

Полученные зависимости между показателями прочности зацеплений и характеристиками планетарных передач позволяют подобрать рациональные значения параметров планетарной передачи, обеспечивающие ее максимальную нагрузочную способность при улучшенных массогабаритных показателях.

### Библиографические ссылки

1. Bostan I., Dulgheru V., Ciobanu R. Elaboration and research of planetary precessional multiplier type k-h-v. *Proc. 7th International Conference on Advanced Concepts in Mechanical Engineering*, 2016, p. 012002. DOI: 10.1088/1757-899X/147/1/012002.
2. Trubachev E., Savelyeva T., Pushkareva T. Practice of design and production of worm gears with localized contact. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 327-343. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.
3. Wehrle E., Palomba I., Vidoni R. In-Operation Structural Modification of Planetary Gear Sets Using Design Optimization Methods. *Proc. 4th IFToMM Sympo-*

*sium on Mechanism Design for Robotics (January 2019)*, pp. 395-405. DOI: 10.1007/978-3-030-00365-4\_47.

4. Plekhanov F., Goldfarb V. Rational designs of planetary transmission, geometry of gearing and strength parameters. *Mechanisms and Machine Science*, 2016, vol. 34, pp. 285-300. DOI: 10.1007/978-3-319-19740-1\_13.

5. Распределение нагрузки в зацеплениях колес рациональных конструкций планетарных передач и его влияние на технико-экономические показатели привода / Ф. И. Плеханов, Е. Ф. Вычужанина, И. А. Пушкарев, А. С. Сунцов // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2017. Т. 20, № 2. С. 29–35. DOI: 10.22213/2413-1172-2017-2-29-35.

6. Plekhanov F.I., Kuznetsov V.S. Deformability of elements of planetary transmission. *Russian Engineering Research*, 2010, vol. 30, no. 6, pp. 557-560. DOI: 10.3103\_s1068798x10060055.

7. Plekhanov F.I. Influence of gear deformability in a planetary transmission on the load distribution in tooth engagement. *Russian engineering research*, 2015, vol. 35, no. 7, pp. 485-488. DOI: 10.3103/S1068798X17120164.

8. Plekhanov F.I. Deformability of units of a planetary gear and its effect on load distribution in gear meshes. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 3, pp. 227-231. DOI: 10.3103/S1068798X17120164.

9. Plekhanov F., Goldfarb V., Vychuzhanina E. Load distribution in meshing of planetary gearwheels and its influence on the technical and economic performance of the mechanism. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 117-137. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

10. Plekhanov F.I., Ovsyannikov A.V. Load capacity of planetary transmission with internal gear engagement. *Russian Engineering Research*, 2011, vol. 31, no. 9, pp. 825-827. DOI: 10.3103/S1068798X11090218.

11. Plekhanov F., Pushkarev A., Pushkarev I. Influence of layout features and parameters of planetary gear on its dynamics and strength characteristics. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 481-494. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

12. Zhang A., Wei J., Qin D., Qin D. Analytical coupling characterization of multi-stage planetary gear free vibration considering flexible structure. *Journal of Vibration Engineering*, October 2017, 19 (6). DOI: 10.21595/jve.2017.17767.

13. Nikolic-Stanojevic V., Dolicanin C., Veljovic L. A new model of the fractional order dynamics of the planetary gears. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, vol. 2013, pp. 932150. DOI: 10.1155/1.4002392.

14. Zhou W., Zuo Y., Zheng M. Analysis and Optimization of the Vibration and Noise of a Double Planetary Gear Power Coupling Mechanism. *Shock and Vibration*, 2018 (2):1-13. November 2018. DOI: 10.1155/2018/9048695.

15. Shao Y. The relationship between the engaging force of planetary gear train and the position correlated modal properties. *The Journal of Engineering*, October 2018. DOI: 10.1049/joe.2018.8964.

16. Li S., Wu Q., Zhang Z. Bifurcation and chaos analysis of multistage planetary gear train. *Nonlinear*

*Dynamics*, January 2014, 75(1-2). DOI: 10.1007/s11071-013-1060-z.

17. Batinic V.J. Planetary gear dynamic response to mesh. *Vojnotehnicki glasnik*, 2013, vol. 61, no. 1, pp. 58-68. DOI: 10.5937/vojtehg61-2006.

18. Исследование нагруженности и деформативности элементов многосателлитной планетарной передачи карьерного комбайна / А. А. Грабский, Ф. И., Плеханов Л. И. Кантович, И. А. Пушкарёв // Горный журнал. 2018. № 4. С. 82–86. DOI: 10.17580/gzh.2018.04.15.

19. Пушкарёв И. А. Моделирование динамики планетарных передач с элементами повышенной податливости // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2018. Т. 21, № 2. С. 43–48. DOI: 10.22213/2413-1172-2018-2-43-48.

20. Там же.

21. Plekhanov F., Pushkarev A., Pushkarev I. Influence of layout features and parameters of planetary gear on its dynamics and strength characteristics. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 481-494. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

22. Plekhanov F.I., Suntsov A.S., Molchanov S.M. Influence of planetary-gear structure on the load distribution. *Russian Engineering Research*, 2017, vol. 37, no. 12, pp. 1028-1032. DOI: 10.3103/S1068798X17120164.

### References

1. Bostan I., Dulgheru V., Ciobanu R. Elaboration and research of planetary precessional multiplier type k-h-v. *Proc. 7th International Conference on Advanced Concepts in Mechanical Engineering*, 2016, p. 012002. DOI: 10.1088/1757-899X/147/1/012002.

2. Trubachev E., Savelyeva T., Pushkareva T. Practice of design and production of worm gears with localized contact. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 327-343. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

3. Wehrle E., Palomba I., Vidoni R. In-Operation Structural Modification of Planetary Gear Sets Using Design Optimization Methods. *Proc. 4th IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics (January 2019)*, pp. 395-405. DOI: 10.1007/978-3-030-00365-4\_47.

4. Plekhanov F., Goldfarb V. Rational designs of planetary transmission, geometry of gearing and strength parameters. *Mechanisms and Machine Science*, 2016, vol. 34, pp. 285-300. DOI: 10.1007/978-3-319-19740-1\_13.

5. Plekhanov F.I., Vychuzhanina E.F., Pushkarev I.A., Suntsov A.S. [Investigation of loading distribution in tooth contact of multi-row planetary gears and its influence on overall economics of the drive]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 29-35 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2017-2-29-35.

6. Plekhanov F.I., Kuznetsov V.S. Deformability of elements of planetary transmission. *Russian Engineering Research*, 2010, vol. 30, no. 6, pp. 557-560. DOI: 10.3103\_s1068798x10060055.

7. Plekhanov F.I. Influence of gear deformability in a planetary transmission on the load distribution in tooth engagement. *Russian engineering research*, 2015, vol. 35, no. 7, pp. 485-488. DOI: 10.3103/S1068798X17120164.

8. Plekhanov F.I. Deformability of units of a planetary gear and its effect on load distribution in gear meshes. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 3, pp. 227-231. DOI: 10.3103/S1068798X17120164.

9. Plekhanov F., Goldfarb V., Vychuzhanina E. Load distribution in meshing of planetary gearwheels and its influence on the technical and economic performance of the mechanism. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 117-137. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

10. Plekhanov F.I., Ovsyannikov A.V. Load capacity of planetary transmission with internal gear engagement. *Russian Engineering Research*, 2011, vol. 31, no. 9, pp. 825-827. DOI: 10.3103/S1068798X11090218.

11. Plekhanov F., Pushkarev A., Pushkarev I. Influence of layout features and parameters of planetary gear on its dynamics and strength characteristics. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 481-494. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

12. Zhang A., Wei J., Qin D., Qin D. Analytical coupling characterization of multi-stage planetary gear free vibration considering flexible structure. *Journal of Vibration Engineering*, October 2017, 19 (6). DOI: 10.21595/jve.2017.17767.

13. Nikolic-Stanojevic V., Dolicanin C., Veljovic L. A new model of the fractional order dynamics of the planetary gears. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, vol. 2013, pp. 932150. DOI: 10.1155/1.4002392.

14. Zhou W., Zuo Y., Zheng M. Analysis and Optimization of the Vibration and Noise of a Double Planetary Gear Power Coupling Mechanism. *Shock and Vibration*, 2018 (2):1-13. November 2018. DOI: 10.1155/2018/9048695.

15. Shao Y. The relationship between the engaging force of planetary gear train and the position correlated modal properties. *The Journal of Engineering*, October 2018. DOI: 10.1049/joe.2018.8964.

16. Li S., Wu Q., Zhang Z. Bifurcation and chaos analysis of multistage planetary gear train. *Nonlinear Dynamics*, January 2014, 75(1-2). DOI: 10.1007/s11071-013-1060-z.

17. Batinic V.J. Planetary gear dynamic response to mesh. *Vojnotehnicki glasnik*, 2013, vol. 61, no. 1, pp. 58-68. DOI: 10.5937/vojtehg61-2006.

18. Grabsky A.A., Plekhanov F.I., Kantovich L.I., Pushkarev I.A. [Loading and deformability of multi-satellite planetary gear trains of mine shovels]. *Gornyi zhurnal*, 2018, no. 4, pp. 82-86 (in Russ.). DOI: 10.17580/gzh.2018.04.15.

19. Pushkarev I.A. [Modeling of dynamics of planetary gears with elements of the increased flexibility]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2018, vol. 21, no. 2, pp. 43-48 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2018-2-43-48.

20. Pushkarev I.A. [Modeling of dynamics of planetary gears with elements of the increased flexibility]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2018, vol. 21, no. 2, pp. 43-48 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2018-2-43-48.

21. Plekhanov F., Pushkarev A., Pushkarev I. Influence of layout features and parameters of planetary gear on its dynamics and strength characteristics. *Mechanisms and Machine Science*, 2018, vol. 51, pp. 481-494. DOI: 10.1007/978-3-319-60399-5.

22. Plekhanov F.I., Suntsov A.S., Molchanov S.M. Influence of planetary-gear structure on the load distribution. *Russian Engineering Research*, 2017, vol. 37, no. 12, pp. 1028-1032. DOI: 10.3103/S1068798X17120164.

### Forced Vibrations of Planetary Gears with Elements of the Increased Flexibility

I.A. Pushkarev, Post-graduate, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

*The paper continues the research of dynamics of planetary gears with elements of the increased flexibility. The basis for the analytical model and input equations is the system of nine differential equations of dynamics of the planetary mechanism received earlier. In the generalized forces the engine moment, the moment caused by torsion of an elastic shaft of a sun gearwheel, and elastic forces in meshing of gearwheels and on satellites axes are considered.*

*The planetary carrier's speed is assumed to be constant. The rigidity of the axis of the satellite in the tangential direction considerably exceeds the rigidity of the axis in the radial direction, therefore, the displacement in the tangential direction is absent. The moment of the engine changes under the harmonious law. In this case forced vibrations of a sun gearwheel and the satellite can be considered separately from forced vibrations of the satellite in the radial direction owing to flexibility of the satellite axis. Amplitude-frequency characteristics of these oscillations are constructed. Characteristics of vibration processes are expressed through mass-dimensional, kinematic and strength parameters of the planetary gear taking into account flexibility of its elements.*

*Influence of the relative height of the flexible axis section, gear ratio of the mechanism and module of gearing on the amplitude of forced vibrations and the position of the resonance area is investigated. Conclusions are drawn on limits of variation of these parameters and their influences on the structure of planetary gears.*

**Keywords:** planetary gear, flexibility of elements, dynamic, vibrations.

Получено 03.12.2018

#### Образец цитирования

Пушкарёв И. А. Вынужденные колебания планетарных передач с элементами повышенной податливости // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2019. Т. 22, № 1. С. 29–36. DOI 10.22213/2413-1172-2019-1-29-36.

#### For Citation

Pushkarev I. A. [Forced vibrations of planetary gears with elements of the increased flexibility]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 29-36 (in Russ.). DOI 10.22213/2413-1172-2019-1-29-36.