

УДК 669.14.018.584

DOI 10.22213/2413-1172-2019-1-52-61

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРЕТО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГРАФИТА В ЧУГУНЕ

В. В. Белых, кандидат технических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В. В. Муравьев, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова; ФТИ УдмФИЦ
УрО РАН, Ижевск, Россия, pmkk@istu.ru

В. А. Степанов, кандидат технических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Установлен степенной закон распределения плотности вероятностей размеров включений графита на плоскости шлифа, показаны возможности параметризации структур чугуна с пластинчатым графитом типа ПГ10; вермикулярным графитом типа ШГ10-ВГ85; шаровидным графитом типа ШГ12. Предложено для классификации структур чугуна использовать показатель α степенного закона распределения плотности вероятностей размеров включений графита в чугуне, принимающий значение $0 < \alpha < 1$ и характеризующий оценку риска и аварийности структуры. Природа степенного закона распределения размеров включений графита возникает из-за фрактальности процессов графитизации и структуры графита. Показано, что степенной закон распределения плотности вероятностей размеров включений графита модифицируется в обобщенное распределение Парето, у которого конечны все моменты, что позволяет от функции распределения сечений графита случайной плоскостью перейти к распределению их размеров в объеме. Обобщенное распределение Парето размеров плоских включений графита позволяет вычислить характерный масштаб $\langle d \rangle$ и структурные параметры α и β графита в чугуне. С помощью структурно-чувствительного параметра β имеется возможность классификации чугунов. Для пластинчатой формы графита $\beta = (0,39-0,56)$, для шаровидной формы $\beta = (1,05-1,06)$, для вермикулярного графита $\beta = 0,66$. Функция распределения включений графита по диаметрам шаров открывает новые возможности количественного анализа связей «структура – свойства» для прогнозирования и моделирования высокопрочного чугуна с шаровидным графитом.

Ключевые слова: структура, шаровидный графит, пластинчатый графит, чугун, математическое ожидание, дисперсия, мультифрактал.

Введение

Для прогноза качества состояний и свойств материалов используются измерения элементов структуры и устанавливаются статистические закономерности их распределения. Существуют традиционные, а также разрабатываются на стыке металловедения и информационных технологий направления математического моделирования и параметризации микроструктур сплавов для развития методов автоматизации и повышения уровня исследований связей «микроструктура – свойства» [1]. Неравновесные условия кристаллизации чугуна определяют графитную фазу различного размера, количества и формы, представленную качественной шкалой микроструктур в ГОСТ 3443–87 «Отливки из чугуна с различной формой графита. Методы определения структуры». Предложено для классификации микроструктур чугуна с шаровидным графитом использовать функцию плотности распределения графитовых включений по размеру включений [2]. Компьютерная обработка микроструктур с различным количеством включений пластинчатого ПГ2, ПГ4, ПГ6,

ПГ10, ПГ12 и шаровидного ШГ2, ШГ4, ШГ6, ШГ10, ШГ12 графитов устанавливает классификационный количественный критерий P_1 , характеризующий общую площадь включений на микроструктуре [3].

Для прогнозирования свойств серого чугуна недостаточно определять размеры, форму, распределение графита, а также структуру металлической основы; необходимо установление взаимосвязей между параметрами микроструктуры и свойствами чугунов, которое до сих пор остается на низком уровне. Формирование литой структуры чугуна в реальных отливках происходит в сильнонеравновесных условиях графитизации углерода и образования аустенитной фазы, на который влияет количество присутствующих элементов, наличие центров кристаллизации графита, скорость охлаждения отливки. При этом когда неравновесная система стремится к некоторому стационарному состоянию на процессы структурообразования влияют явления самоорганизации [4]. В работе [5] использовались методы фрактального анализа для описания структурных параметров графитизиро-

ванных чугунов, были использованы методы фрактальной кластеризации (агрегации) вещества. Термин «кластер» применяют для описания различных структур, возникающих в процессе их взаимодействия или агрегации [6]. Теория фрактальной агрегации используется для описания процессов электролиза, осаждения частиц при напылении, описания структуры пористых тел, строения границ сплавов, формообразования в биологии и геологии, возникновения шаровых молний и электрического пробоя материалов [7]. С помощью фрактального анализа изображений микроструктур чугуна (стандартные шкалы по ГОСТ 3443–87) получены морфологические параметры графитовой фазы – параметры распределения и форма графитовых включений, которые не могут быть численно определены по стандартным методикам.

Цель работы – определение функции распределения Парето размеров включений графита для параметризации изображения структуры; установление количественных оценок параметров структуры высокопрочного чугуна с шаровидным графитом; математическое моделирование перехода от распределения Парето размеров сечений графита $p(x)$ на плоскости шлифа к распределению размеров шаров в объеме $F(x)$.

Используемые подходы.

Исследуемые материалы

Фрактальная размерность стандартизированного графитового включения определялась по методу сеток, при котором изображение включения разбивается сеткой на ячейки заданных размеров. Сканирование изображения включения осуществляется за несколько циклов, при этом на каждом последующем цикле размеры ячеек сетки увеличиваются. Фрактальная размерность вычисляется по формуле

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln \varepsilon}, \quad (1)$$

где ε – размер ячейки сетки; N_ε – количество ячеек размера ε , содержащих пиксели изображения включения. Размер ячейки (ε) определяется как отношение площади ячейки к общей площади изображения.

Диапазон фрактальных размерностей был разделен в соответствии со шкалами ГОСТ 3443–87 на пять ступеней компактности. Первая ступень (1,0...1,09) отвечает пластинчатой игольчатой форме графита (ПГф3); вторая (1,1...1,29) – пластинчатой прямолинейной

(ПГф1); третья (1,3...1,49) – пластинчатой завиточной (ПГф2) и гнездообразной (ПГф4), а также вермикулярной извилистой (ВГф2); четвертая (1,5...1,69) – вермикулярной узелковой (ВГф1) и утолщенной (ВГф3), а также структуре ковкого чугуна – нитевидной (КГф1) и хлопьевидной (КГф2); пятая ступень (1,7...1,9) включает компактную форму включений ковкого чугуна (КГф3) и всю шкалу, относящуюся к чугуну с шаровидным графитом (ШГф1...ШГф5).

Для оценки степени равномерности распределения объектов в плоскости используется лакуарность, характеризующая неоднородность заполнения изображения пикселями, относящаяся к графитовой фазе. Лакуарность рассчитывается по формуле

$$\Lambda = \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2, \quad (2)$$

где σ – стандартное отклонение массы (для бинарного изображения – количество пикселей) фрактального агрегата в ячейках сетки заданного размера ε ; μ – среднее значение массы агрегата в ячейках заданного размера ε . Количество графитовой фазы в чугуне вычисляется из отношения количества черных пикселей ($C_{гр}$), которые характеризуют содержание графитовой фазы, наблюдаемой в плоскости шлифа, к общему количеству пикселей изображения ($C_{из}$). Размер графитовых включений оценивается по отношению суммы площадей графитовых включений (F_i) к общему числу включений (n), сегментированных на изображении микроструктуры.

Фрактальная модель формирования шаровидных включений графита в чугуне по механизму диффузионно ограниченной агрегации доказала применимость методов фрактальной геометрии к описанию морфологии включений шаровидного графита в чугуне, показала, что строение включений и фрактальных кластеров имеют общие морфологические признаки и свойства в высокопрочном чугуне [8].

Высокопрочный чугун с шаровидным графитом сохраняет свою актуальность, изучается и расширяется область его применения [9]. Для его получения чугуны модифицируют путем обработки жидкого металла магнием. Под действием магния графит в процессе кристаллизации принимает шаровидную форму. В сталях и чугунах экспериментально доказано присутствие фуллеренов. В чугунах скопление фуллеренов приводит при определенных условиях к образо-

ванию пластинчатого или шаровидного строения. Известная кристаллическая решетка графита с послойным расположением атомов углерода может рассматриваться как последовательно расположенные сферы фуллеренов (гиперфуллерен). Вокруг таких скоплений углерода формируется слой из атомов железа. Самоорганизация фуллеренов является механизмом повышения адаптивности структуры стали на молекулярном уровне, что подобно роли дислокаций и других дефектов на атомном уровне. Поэтому управление стабильностью структуры стали, контролирующей надежность работы в эксплуатационных условиях, обеспечивается созданием в стали необходимого количества фуллеренов для протекания процессов их самоорганизации с помощью различных технологических приемов, например, при кристаллизации, термообработке и других воздействиях [10–12].

Процессы самоорганизации фуллеренов в чугуне приводят к образованию фрактальных кластеров, определяющих уровень физико-механических характеристик чугуна в отливках. Фрактальные свойства кластеров выражаются в том, что если выбрать одну из связанных частиц в качестве центра сферы, радиус которой R существенно превышает размер отдельной частицы, то масса вещества m , сосредоточенная внутри сферы, зависит от радиуса согласно закону

$$m(R) \sim R^D, \quad (3)$$

где параметр D является фрактальной размерностью кластера [7]. Для сплошного твердого тела в трехмерном пространстве $D = 3$ реальные фрактальные кластеры имеют дробную размерность в пределах $D = 1,7 \dots 2,5$. С ростом размера фрактального кластера плотность вещества в нем падает согласно закону R^{D-3} и, соответственно, уменьшается его прочность. На плоскости фрактал можно покрыть кругами радиуса R ; число кругов (объектов) $N(R)$, покрывающих фрактал и радиус круга R , связаны уравнением $N(R) = R^D$. Фрактальная размерность характеризует заполнение пространства фрактальным кластером в интервале масштабов $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$, в котором наблюдается масштабная инвариантность. Нижний предел связан с конечным размером структурных элементов, а верхний – со стремлением фрактальной размерности D к пределу (хаусдорфовой) размерности. Через фрактальную размерность оценивают механизм формирования и скорость роста элементов фрактала с увеличением интервала масштабов. Классический пример наглядности фрактала и фрактальной размерности – лист бумаги (дву-

мерный объект), скомканный в шар. Бумажный шар не является двумерным, у него есть три измерения (длина, ширина, высота), но и трехмерным он не является, так как он не полностью однороден. Фрактальная размерность бумажного шара $D \approx 2,5$, при этом нормальная (эвклидова) размерность шара 3.

Литая структура чугуна – сложная система, в которой идут процессы графитизации с образованием графитовых включений и кластеризация аустенита при кристаллизации матрицы металла. Сложные системы моделируются на основе степенных законов распределения вероятности, т. е. статистические характеристики происходящих в них событий имеют плотность вероятности вида

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (4)$$

где показатель α обычно лежит в диапазоне $0 \dots 1$, и в него попадают показатели для распределений характеристик катастроф и рисков [13].

В материаловедении фрактальные структуры описываются распределением Парето, которое часто встречается при исследовании социальных, экономических, физических явлений. Закон Парето (*принцип Парето*) – эмпирическое правило, названное в честь экономиста и социолога Вильфредо Парето, в наиболее общем виде формулируется как «20 % усилий дают 80 % результата, а остальные 80 % усилий – лишь 20 % результата». Формализацией принципа Парето является одномерная функция непрерывного распределения двухпараметрического (α, d_0) распределения вероятности:

$$F(d) = 1 - \left(\frac{d_0}{d}\right)^\alpha, \quad (5)$$

соответствующая ей функция плотности вероятности

$$P(d) = \frac{\alpha}{d_0} \left(\frac{d}{d_0}\right)^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, d \geq d_0 > 0, \quad (6)$$

где d_0 – минимально возможное значение; α – показатель степени.

Подобные степенные зависимости называют распределениями с «тяжелыми хвостами». Степенной параметр α характеризует «тяжелый хвост», определяющий вероятность крупных событий, рисков и катастроф. В распределении Парето математическое ожидание случайной величины имеет конечное значение, если параметр $\alpha > 1$. При значениях $0 < \alpha < 1$ математическое ожидание бесконечно (нет внутреннего масштаба). Дисперсия распределения Парето

случайной величины имеет конечное значение, если $\alpha > 2$. При значениях $0 < \alpha < 2$ дисперсия бесконечна. В мультифрактальных структурах показатель $\alpha(\xi)$ является функцией $\xi(x)$ и только в пределах больших и малых x достигает предельных значений $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$ [14, 15].

Актуальность работы:

– получение высокопрочного чугуна с шаровидным графитом;

– установление закономерностей параметризации изображений, повышение точности анализа при переходе от качественных к количественным оценкам для разработки программного обеспечения и автоматизации исследований микроструктур чугунов;

– определение функции плотности распределения размеров шаровидных включений графита в объеме на основе функции распределения Парето размеров сечений на плоскости шлифа.

Объект исследования – графит в структуре серого чугуна, модифицированного лигатурой СМг6КО3.

Математическое моделирование фрактальных процессов графитизации чугуна

В работе использовался исходный чугун с пониженным содержанием серы (0,021 %) и фосфора (0,10 %) для исключения их влияния на графитизацию и механические свойства. Химический состав исходного чугуна указан в первой строке табл. 1. Для модифицирования использовалась лигатура СМг6КО3 (хим. состав, % (массовая доля химических элементов): 88,75 Fe; 1,1 Ca; 1,1Al; 0,45 PЗМ; 6 Mg). Плавка производилась в индукционной печи с основной футеровкой. Жидкий чугун подвергали перегреву до температур 1520-1530 °С. Модифицирование проводилось в подогретом ковше емкостью 25 кг, модификатор имел фракцию 1-8 мм и насыпался на дно ковша. Температура модифицирования составляла 1490 °С. После выдержки жидкий чугун заливался во влажную песчано-глинистую форму. Отливались плиты размерами 25×320×320 мм. Величина добавки лигатуры СМг6КО3 варьировалась в пределах (массовая доля к массе чугуна): 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5(%). В табл. 1 приводится химический состав модифицированного чугуна [16].

С увеличением добавки лигатуры изменяется содержание кремния (от 2,14 до 3,48 %) и магния (от 0 до 0,091 %). Содержание остаточного Mg в полученном высокопрочном чугуне с шаровидным графитом соответствует оптимальному содержанию (0,03-0,07) % [17].

Таблица 1. Результаты химического анализа плавков с СМг6КО3, %

Table 1. The results of chemical analysis of bottoms with SMg6KO3, %

СМг, %	C	Si	Mg	Mn	Cr	Ni	S	P
0	3,09	2,14	–	0,28	0,06	0,03	0,021	0,10
1	3,16	2,80	0,012	0,38	0,04	0,03	0,030	0,08
1,5	3,08	3,00	Следы	0,42	0,04	0,03	0,030	0,08
2	3,08	3,06	0,018	0,35	0,05	0,03	0,025	0,10
2,5	3,00	3,58	0,053	0,28	0,04	0,03	0,030	0,08
3	3,08	3,78	0,085	0,29	0,04	0,03	0,030	0,08
3,5	3,08	3,48	0,091	0,28	0,05	0,03	0,030	0,08

Оценка эвтектичности полученных чугунов проводилась с помощью показателя углеродного эквивалента и степени эвтектичности. Углеродный эквивалент рассчитывался с учетом влияния примесей кремния и фосфора по формуле $S_{\text{экт}} = \%C + 0,3(\%Si + \%P)$. Относительное содержание эвтектики в чугуне определялось через степень эвтектичности:

$$S_{\text{экт}} = \frac{\%C + 0,15(\%Si) - 2,1}{2,2 - 0,15(\%Si)}$$

Все полученные чугуны доэвтектические: $S_{\text{экт}} = 4,0$ и $S_{\text{экт}} = 0,82-0,83$ при добавке лигатуры в массовой доле (1,0-2,0)%; $S_{\text{экт}} = (4,10-4,24)\%$ и $S_{\text{экт}} = 0,86-0,95$ при добавке лигатуры в массовой доле (2,5-3,5)%. Эвтектичный чугун имеет меньшую усадку и максимальную жидкотекучесть ($S_{\text{экт}} = 4,3$ и $S_{\text{экт}} = 1$). Лучшие литейные свойства у высокопрочного чугуна, полученного при добавке 3,0 % лигатуры.

Результаты исследования структуры графита

Структуру графита в литом чугуне изучали на плоскости шлифа с помощью оптического микроскопа согласно ГОСТ 3443–87, описание приводится в табл. 2.

Таблица 2. Влияние лигатуры на структурообразование чугуна

Table 2. The effect of ligatures on the formation of iron

СМг, %	Структура графита (ГОСТ 3443–87)
1,0	ПГф1-ПГф2-ПГд15-ПГд350-ПГр2-ПГ10
1,5	ПГф1-ПГф2-ПГд15-ПГд350-ПГр2-ПГ10
2,0	ПГф1-ПГф2-ПГд15-ПГд350-ПГр2-ПГ10
2,5	ШГф3-ВГф3-ШГд15-ШГд180-ШГр3-ШГ10-ВГ85
3,0	ШГф5-ШГд15-ШГд90-ШГр1-ШГ12
3,5	ШГф5-ШГд15-ШГд90-ШГр1-ШГ12

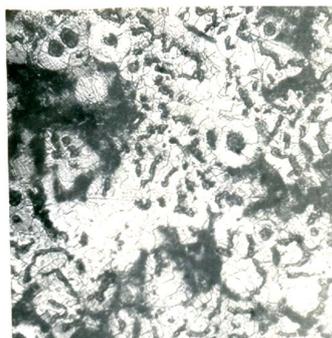
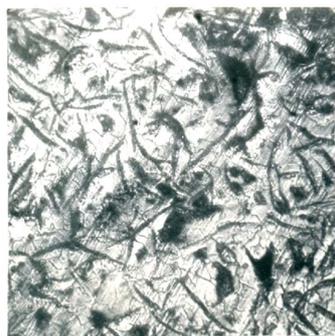
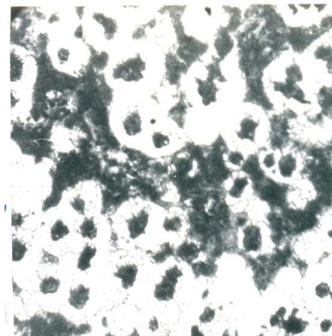
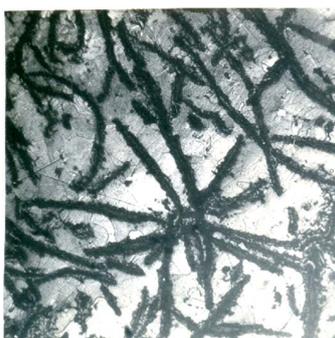
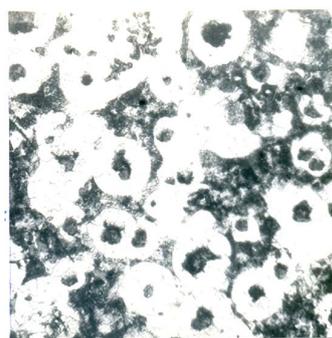
Примечание: ПГф – графит пластинчатой формы; ШГф – графит шаровидной формы.

Металлографический анализ чугунов показал (рисунок, табл. 2), что до 2 масс. % лигатуры (< 0,018 масс. % Mg) форма графита пластинчатая прямолинейная ПГф1 и завихренная ПГф2, площадь, занятая графитом, от 8 до 12 % (ПГ10). Размеры графита ПГд15-ПГд350. В металлической матрице возрастает ферритная основа от Ф55 до Ф80, перлит снижается от П45 до П6.

При добавке 2,5 масс. % лигатуры (0,053 масс. % Mg) в структуре чугуна кристаллизуется графит утолщенной вермикулярной формы

(ВГф3-ВГ85) наряду с шаровидной формой (ШГф3-ШГ10-ШГр3). Размеры включений ШГд15-ШГд180. В матрице присутствует перлит (П45) и феррит (Ф55).

При добавке (3,0-3,5) масс. % лигатуры (0,085...0,095 масс.% Mg) включения графита правильной шаровидной формы ШГф5, равномерно распределены ШГр1, площадь, занятая графитом, не меньше 12 % (ШГ12). Размеры включений ШГ15-ШГ90. Содержание перлита и феррита в матрице (П45) и (Ф55).

*a**d**b**e**c**f*

Шлифы чугуна с различным содержанием лигатуры CMr6KO_3 (травление 4%-м раствором HNO_3): *a* – графит пластинчатой формы ПГф1-ПГф2 (1,0 масс. % CMr); *b* – графит пластинчатой формы ПГф1-ПГф2 (1,5 масс. % CMr); *c* – графит пластинчатой формы ПГф1-ПГф2 (2,0 масс. % CMr); *d* – графит вермикулярной и шаровидной формы ВГф3-ШГф3 (2,5 масс. % CMr); *e* – графит шаровидной формы ШГф5 (3,0 масс. % CMr); *f* – графит шаровидной формы ШГф5 (3,5 масс. % CMr)

Cast iron sections with different content of CMr6KO_3 ligature (etching with 4% HNO_3 solution): *a* - lamellar graphite PGF1-PGF2 (1.0 wt.% CMg); *b* - lamellar graphite PGF1-PGF2 (1.5 wt.% SMg); *c* - graphite lamellar form PGF1-PGF2 (2.0 wt.% SMg); *d* - graphite of vermicular and spherical forms VGf3-ShGf3 (2.5 wt.% SMg); *e* - spherical graphite ShGf5 (3.0 wt.% SMg); *f* - spherical graphite ShGf5 (3.5 wt.% SMg)

С помощью оптического микроскопа на различных участках шлифа вдоль прямой линии 10 мм определялись размеры d (диаметр – равноосных, наибольшая длина – вытянутых) включений и сортировались результаты измерений по размерным группам: 10-40, 40-70, 70-100, 100-130, 130-160, 160-190, 190-210, 210-240, 240-270, 270-300, 300-330, 330-360, >360 мкм. После сортировки по группам получили k значений количества включений Q_k (шт.), имеющих размер $d_{k-1} \leq d \leq d_k$. После перенормировки размер включения равен $x = d/d_0$, где $d_0 = 10$ мкм. Суммирование выражения $P_k = \sum Q_k$ дает число P_k включений крупнее x_k , а после нормировки на число P_0 всех включений (крупнее $d_0, x > 1$) – значения кумулятивной плотности распределения $p(x_k) = P_k/P_0$ (доля включений, размер которых превышает $d_k = x_k d_0$; величина $[1 - p(x)]$ – интегральная плотность распределения).

Представление распределения в виде кумулятивной плотности $p(x)$ не зависит от выбора границ разрядов x_k . Получаем распределение Парето:

$$p(x) = 0 \text{ при } x < 1; \tag{7a}$$

$$p(x) = x^{-\alpha} \text{ при } x \geq 1. \tag{7b}$$

В области существования $x \geq 1$ плотность $0 \leq p(x) \leq 1$; $p(1) = 1$ и $p(\infty) \rightarrow 0$.

В табл. 3 приведены результаты статистической обработки степенного закона распределения плотности вероятностей размеров включений графита: параметр распределения α ; среднеквадратичная погрешность S_α и их отношение, фрактальная размерность $D = 1 + \alpha$. В случае распределений с «тяжелыми хвостами» выбо-

рочное среднее является неустойчивым и малоинформативным показателем из-за неприменимости закона больших чисел. Показатель распределения α и погрешность S_α определялись методом наименьших квадратов. Можно отметить, что средняя величина показателя распределения $0 < \alpha < 1$ для всех чугунов. У чугуна с пластинчатой формой графита разброс показателя распределения $\alpha < 1$. На рис. 1, с можно отметить заметное увеличение пластин по сравнению с размерами включений на других изображениях микроструктур. В чугуне с вермикулярной и шаровидной формами графита интервал изменения показателя распределения $\alpha < 2$, при этом уменьшается размер включений, форма становится компактной.

Вследствие мультифрактальности структуры графита наблюдается большой разброс величины α и среднеквадратичной погрешности S_α , отмечается экстремальный характер изменения величины α и отношения S_α/α . Экстремум наблюдается при значении управляющего внешнего параметра (содержание 2,0 масс.% лигатуры), соответствующего перестройке структуры чугуна. Значению сверхкритической структуры соответствует параметр $\alpha = 0,5$, что согласуется с представлением процесса графитизации как ветвящегося процесса с коэффициентом размножения $m = 1$ и $\alpha = 0,5$.

Установленный диапазон значений средней величины показателя распределения размеров включений графита в чугуне $0 < \alpha < 1$ совпадает с распределением характеристик катастроф и бедствий, при этом математическое ожидание распределения Парето может принимать при большом объеме измерений бесконечное значение. Для распределения размеров диаметров кругов $\alpha > 1$ математическое ожидание конечно, среднее отслеживает небольшие размеры, но бесконечное значение принимает дисперсия.

Таблица 3. Величина параметра α распределения Парето и фрактальная размерность D

Table 3. The value of the parameter α of the Pareto distribution and the fractal dimension D

Форма графита	Пластинчатая			Вермикулярная	Шаровидная	
	1,0	1,5	2,0		2,5	3,0
Масс.% СМг	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\alpha \pm S_\alpha$	0,57 ± 0,4	0,66 ± 0,4	0,49 ± 0,2	0,83 ± 0,8	0,77 ± 0,9	0,88 ± 1,1
S_α/α	0,70	0,61	0,41	0,96	1,17	1,25
D	1,57	1,66	1,49	1,83	1,77	1,88

Для классификации формы и распределения включений можно использовать показатель распределения графитовых включений α , который согласно фрактальным представлениям является оценкой сложности структуры фрактала. Можно

применить для описания распределения графитовых включений распределение Пуассона с параметром $Np = \text{const}$ при $N \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$, тогда закон распределения плотности вероятности фрактала размера R имеет вид $p(R) \sim R^{-D}$.

Фрактальная размерность D позволяет оценить плотность геометрической вероятности заполнения фрактала регулярной сеткой или кругами размера R и степенного закона распределения плотности вероятностей: $R^{-D} \sim R^{-(1+\alpha)}$. При стремлении R к верхнему пределу фрактальная размерность и степенной показатель α распределения Парето размеров графитовых включений связаны соотношением $D=1+\alpha$. Для пластинчатой формы $\alpha = (0,49...0,66)$, $D = (1,49...1,66)$; для вермикулярной и шаровидной формы $\alpha = (0,77...0,88)$, $D = (1,77...1,88)$. Полученные оценки D не противоречат стандартным оценкам фрактальных размерностей графитовых включений эталонных микроструктур.

Сверхкритической структуре соответствует третья ступень компактности формы графита $D = (1,3...1,49)$ – пластинчатая завихренная (ПГф2) и гнездообразная (ПГф4), а также вермикулярная извилистая (ВГф2). При этой структуре графит образует бесконечный фрактальный кластер и снижается прочность модифицированного чугуна.

В работе использовано обобщенное распределение Парето у которого, при $x \geq 1$ имеется следующий член ряда по степеням $u = \ln x$:

$$\ln p(x) = -(\alpha u + \beta u^2), \quad (8a)$$

или

$$p(x) = \exp\left[-(\alpha u + \beta u^2)\right]. \quad (8b)$$

При $\beta > 0$ у распределения (8б) существуют все моменты:

$$m_k = \int_1^{\infty} x^k \left(-\frac{dp}{dx}\right) dx. \quad (9)$$

Внутренний масштаб – это средний размер включений графита:

$$\langle x \rangle = m_1 = 1 + \beta^{-1/2} \exp(c^2) \varphi(-c), \quad (10)$$

где

$$c = \frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\beta}}; \quad \varphi(-c) = \int_{-c}^{\infty} \exp(-t^2) dt. \quad (11)$$

Выполнив в (8) замену переменной $Z = -\ln p(x)/\ln x$, можно получить линейную зависимость

$$Z = \alpha + \beta u. \quad (12)$$

Методом наименьших квадратов рассчитывались значения показателей α , β , среднеквадратичные отклонения S_α и S_β , средние размеры включений графита $\langle d \rangle$. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4. Механические свойства и параметры распределения графита в исследуемом чугуне
Table 4. Mechanical properties and parameters of the distribution of graphite in the iron under study

Форма графита	Пластинчатая			Вермикулярная	Шаровидная	
СМ _Г -6КОЗ масс. %	1 %	1,5 %	2,0 %	2,5 %	3,0 %	3,5 %
НВ	121 ±24	126 ±18	116 ±21	208 ±17	234 ±14	245 ±21
α	-0,65	-1,14	-0,97	-0,86	-1,60	-1,57
S_α	0,09	0,34	0,02	0,11	0,63	0,34
β	0,39	0,56	0,46	0,66	1,06	1,05
S_β	0,03	0,11	0,04	0,05	0,30	0,16
$\langle d \rangle$, мкм	98	109	126	51	54	53

Обсуждение результатов

Результаты расчета параметров α и β представлены в табл. 4. Параметр α принимает отрицательные значения, что позволяет при расчете математического ожидания учитывать вклад единичных крупных включений.

У обобщенного распределения Парето структурно-чувствительным параметром является β . Для пластинчатой формы графита $\beta = (0,39...0,56)$, для шаровидной формы $\beta = (1,05...1,06)$, имеющего промежуточное состояние структуры у вермикулярного графита $\beta = 0,66$.

Рассматривая с позиций синергетики литейную структуру чугуна как сложную систему, видим,

что с изменением внешнего (управляющего) параметра (содержание масс. % лигатуры СМ_Г), меняется параметр порядка в системе; при этом в результате самоорганизации фуллеренов происходит рост фрактального кластера, что проявляется максимальным увеличением размеров включений и ослаблением прочности металлической матрицы чугуна. Этому сверхкритическому состоянию соответствует значение параметра $\beta = 0,46$ и содержание лигатуры 2,0 %. При 2,5 % лигатуры в чугуне образуются вермикулы (червеобразные включения), с возрастанием лигатуры до (3,0-3,5) % появляются включения компактной и шаровидной форм.

У обобщенного распределения конечны все моменты и это позволяет рассчитать математическое ожидание $\langle d \rangle$ (см. табл. 4).

Обобщенное распределение Парето размеров сечений включений плоскостью шлифа позволяет перейти к распределению размеров включений по объему $F(r)$.

Функция плотности распределения $F(r)$ размеров диаметра r непересекающихся шаров и функция плотности распределения $f(d)$ размеров диаметра d кругов, полученных сечением шаров случайной плоскостью, связаны соотношением [18]

$$\frac{\langle r \rangle f(d)}{d} = \int_d^{\infty} (r^2 - d^2)^{-\frac{1}{2}} F(r) dr, \quad (13)$$

где $\langle r \rangle$ – средний диаметр шара. Заменяя функцию распределения диаметров круглых сечений $f(d)$ обобщенным распределением Парето $p(d)$, можно определить $F(r)$ из интегрального уравнения. Связь моментов диаметров шаров d_k с моментами размера диаметра кругов r_k выражается соотношением:

$$r_{k+1} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right) d_k}{\left(\frac{K+2}{2}\right)}, \quad (14)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, $\Gamma(k)$ – гамма-функция; r_k – момент k -го порядка диаметра шаров; d_k – момент k -го порядка диаметра кругов.

Выводы

Твердость чугуна в литом состоянии возрастает (НВ от 121 до 245) с улучшением формы графита и уменьшением его средних размеров от (98-126) мкм для пластин до (51-54) мкм для компактной формы.

Показатель распределения графитовых включений α позволяет классифицировать форму и распределение включений.

Сверхкритическая структура в сером чугуне соответствует третьей ступени компактности формы графита $D = (1,3 \dots 1,49)$, форма графита – пластинчатая завихренная (ПГф2), гнездообразная (ПГф4), а также вермикулярная извилистая (ВГф2). При этой структуре графит образует бесконечный фрактальный кластер и снижается прочность модифицированного чугуна.

Обобщенное распределение Парето размеров плоских включений графита позволяет вычис-

лить характерный масштаб $\langle d \rangle$ и структурные параметры α и β графита в чугуне.

С помощью структурно-чувствительного параметра β имеется возможность классификации чугунов. Для пластинчатой формы графита $\beta = (0,39 \dots 0,56)$, для шаровидной формы $\beta = (1,05 \dots 1,06)$, для вермикулярного графита $\beta = 0,66$.

Компьютерное моделирование структур чугуна с различным количеством включений графита может использоваться для автоматизации диагностирования свойств сплава в заводских лабораториях.

Вычисление и моделирование распределения шаров графита необходимо для прогнозирования физических свойств высокопрочного чугуна.

Библиографические ссылки

1. Тимофеев В. Л., Белякова Г. Н. Оценка механических свойств серого чугуна марки СЧ20 // Вестник ИжГТУ. 2010. № 2 (46). С. 7.
2. Компьютерная обработка микроструктур чугуна с различным количеством включений пластинчатого и шаровидного графита / А. Н. Чичко, А. О. Сачек, С. Г. Лихоузов, В. Ф. Соболев, О. И. Чичко // Литье и металлургия. 2013. № 3 (71). С. 66–71.
3. Параметризация изображений микроструктур чугуна с шаровидным графитом на основе функции плотности распределения графита по размерам включений / О. А. Сачек, А. Н. Чичко, С. Г. Лихоузов, Т. В. Матюшинец, О. И. Чичко // Литье и металлургия. 2017. № 1 (86). С. 51–58.
4. Хмелевская В. С. Процессы самоорганизации в твердом теле // Соровский образовательный журнал. Физика. 2000. Т. 6, № 6. С. 85–91.
5. Макаренко К. В., Тотай А. В., Тихомиров В. П. Использование фрактального формализма для описания структур конструкционных материалов // Вестник Брянского государственного технического университета. 2011. № 4 (32). С. 55–64.
6. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
7. Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 136 с.
8. Соценко О. В. Компьютерная DLA-модель формирования шаровидного графита в высокопрочном чугуне // Металл и литье Украины. 2009. № 9. С. 3–9.
9. Об опыте изготовления и эксплуатации зубчатых колес из нового конструкционного материала «Моника» / В. В. Комиссаров, Е. С. Таранова, П. С. Дробышевский, В. О. Замятин, С. А. Тюрин, Л. А. Сосновский // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2017. Т. 20, № 2. С. 107–112.
10. Керл Р. Ф., Смолли Р. Э. Фуллерены // В мире науки. 1991. № 12. С. 14–24.
11. Фуллеренная модель структуры высокоуглеродистых сплавов на основе железа / Н. Р. Кузев, ...

М. М. Закирничная, Г. Х. Самигуллин, Н. В. Мекалова // *Металлы*. 1999. № 1. С. 74–79.

12. Фуллерены в чугунах / В. С. Иванова, Д. В. Козицкий, М. М. Закирничная, И. Р. Кузеев // *Материаловедение*. 1998. № 2. С. 5–14.

13. *Малинецкий Г. Г., Потопов А. Б., Подлазов А. В.* Нелинейная динамика : Подходы, результаты, надежды. М. : КомКнига, 2006. 280 с. (Синергетика от прошлого к будущему.)

14. *Штрель М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 528 с.

15. *Штрель М. А.* Обобщение распределения Парето в задачах статистической металлографии // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2005. Т. 71, № 8. С. 25–31.

16. *Белых В. В., Хосен Ри, Марьян Б. Н.* Физико-механические свойства железоуглеродистых сплавов. Методы контроля и прогнозирования качества отливок. Владивосток : Дальнаука, 2003. 312 с.

17. *Трухов А. П., Мальяров А. И.* Литейные сплавы и плавка. М. : Академия, 2004. 335 с.

18. *Вульфсон Н. И.* Методы стереологии в геофизике. Л. : Гидрометеиздат, 1989. 200 с.

References

1. Timofeev V.L., Belyakova G.N. [Evaluation of the mechanical properties of gray cast iron of grade SCH20]. *Vestnik IzhGTU*, 2010, no. 2, p. 7 (in Russ.).

2. Chichko A.N., Sachek A.O., Likhovozov S.G., Sobolev V.F., Chichko O.I. [Computer processing of cast iron microstructures with different number of inclusions of lamellar and spherical graphite]. *Lit'e i metallurgiya*, 2013 no. 3, pp. 66-71(in Russ.).

3. Sachek O.A., Chichko A.N., Likhovozov S.G., Matyushinets T.V., Chichko O.I. [Parameterization of images of microstructures of nodular cast iron based on the density function of the distribution of graphite in the size of inclusions]. *Lit'e i metallurgiya*, 2017, no. 1, pp. 51-58 (in Russ.).

4. Khmelevskaya V.S. [Processes of self-organization in solids]. *Sorovskii obrazovatel'nyi zhurnal, Fizika*, 2000, vol. 6, no. 6, pp. 85-91 (in Russ.).

5. Makarenko K.V., Totai A.V., Tikhomirov V.P. [Using the fractal formalism to describe the structures of structural materials]. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, no. 4, pp. 55-64 (in Russ.).

6. Feder E. *Fraktaly* [Fractals]. Moscow, Mir Publ., 1991, 254 p. (in Russ.).

7. Smirnov B.M. *Fizika fraktal'nykh klasterov* [Physics of Fractal Clusters]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 136 p. (in Russ.).

8. Sotsenko O.V. [Computer DLA-model of the formation of spherical graphite in high-strength cast iron]. *Metall i lit'e Ukrainy*, 2009, no. 9, pp. 3-9 (in Russ.).

9. Komissarov V.V., Taranova E.S., Drobyshevsky P.S., Zamyatnin V.O., Tyurin S.A., Sosnovsky L.A. [On the experience of manufacturing and operating gear wheels from a new construction material "Monika"]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 107-112 (in Russ.).

10. Curl R.F., Smalley R.E. [Fullerenes]. *V mire nauki*, 1991, no. 12, pp. 14-24 (in Russ.).

11. Kuzeev N.R., Zakirnichnaya M.M., Samigullin G.Kh., Mekalova N.V. [Fullerene model of the structure of high carbon alloys based on iron]. *Metally*, 1999, no. 1, pp. 74-79 (in Russ.).

12. Ivanova V.S., Kozitsky D.V., Zakirnichnaya M.M., Kuzeev I.R. [Fullerenes in cast iron]. *Materialovedenie*, 1998, no. 2, pp. 5-14 (in Russ.).

13. Malinetsky G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. *Nonlinear dynamics: Approaches, results, hopes. Synergetics from the past to the future* [Nonlinear dynamics: Approaches, results, hopes. Synergetics from the past to the future]. Moscow, KomKniga Publ., 2006, 280 p. (in Russ.).

14. Schröder M. *Fractals, chaos, power laws* [Fractals, chaos, power laws]. Moscow - Izhevsk, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2001, 528 p. (in Russ.).

15. Shtremel M.A. [Generalization of the Pareto distribution in problems of statistical metallography]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2005, vol. 71, no. 8, pp. 25-31(in Russ.).

16. Belykh V.V., Khosen Ri, Marin B.N. *Physico-mechanical properties of iron-carbon alloys. Methods of monitoring and predicting the quality of castings* [Physico-mechanical properties of iron-carbon alloys. Methods of monitoring and predicting the quality of castings]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2003, 312 p. (in Russ.).

17. Trukhov A.P., Malyarov A.I. *Liteinye splavy i plavka* [Foundry alloys and melting]. Moscow, Akademiya, 2004, 335 p. (in Russ.).

18. Wolfson N.I. *Stereology methods in geophysics* [Stereology methods in geophysics]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1989, 200 p. (in Russ.).

Application of Generalized Pareto Distribution to Determine the Structural Graphite Parameters in Cast Iron

V.V. Belykh, PhD in Engineering, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

V.V. Murav'yev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU; PhTI UdmFIC UB RAS, Izhevsk, Russia, pmkk@istu.ru

V.A. Stepanov, PhD in Engineering, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The power-law distribution of probability density (SSRV) sizes of graphite inclusions in the plane of the thin section is established in the work. The possibilities of structures parameterization of cast iron are shown: with flake graphite such as PG 10; vermicular graphite such as SHG10-VG85; spheroidal graphite such as SHG12. It is proposed to use the SSRV index of the sizes of graphite inclusions in cast iron for classification of cast iron structures

that takes α value $0 < \alpha < 1$ and characterizing the risk and accident assessment of structures. The nature of power-law distribution of sizes of graphite inclusions occurs because of the fractality of graphitization processes and the graphite structure. It is shown that SSRW is modified into a generalized Pareto distribution (GP) which has all finite moments that allows the distribution function of the graphite cross-sections of random plane to move to the distribution of their sizes in volume. The generalized Pareto distribution of dimensions of flat inclusions of graphite allows for analyzing the specific scale $\langle d \rangle$ and structural parameters α and β of graphite in cast iron. There is a possibility of cast iron classification for platelet-shaped graphite such as PG 10 $\beta = (0.39-0.56)$, for spherical shape graphite such as SHG12 $\beta = (1.05-1.06)$, and for vermicular graphite such as SHG10-VG85 $\beta = 0.66$. The distribution function of graphite inclusions by diameters of balls opens up new possibilities of quantitative analysis of the “structure-properties” connections, for forecasting and modeling of high-strength cast iron with spheroidal graphite.

Keywords: structure, spheroidal graphite, plate graphite, cast iron, expectation, dispersion, multifractal.

Получено 23.01.2019

Образец цитирования

Белых В. В., Муравьев В. В., Степанов В. А. Применение обобщенного распределения Парето для определения структурных параметров графита в чугунах // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2019. Т. 22, № 1. С. 52–61. DOI 10.22213/2413-1172-2019-1-52-61.

For Citation

Belykh V.V., Murav'ev V.V., Stepanov V.A. [Use of the generalized Pareto distribution to determine structural parameters of graphite in cast iron]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 52-61 (in Russ.). DOI 10.22213/2413-1172-2019-1-52-61.