

УДК 53.08:681.3.08

DOI: 10.22213/2413-1172-2019-4-83-92

## ИЗМЕРЕНИЕ АМПЛИТУД, ЧАСТОТ И ФАЗ ПРОСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ СЛОЖНОГО СИГНАЛА ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

С. В. Леньков, доктор технических наук, Физико-технический институт УдмФИЦ УрО РАН, Ижевск, Россия

*Предложен способ оценки амплитуд, частот и фаз конечного числа простых периодических составляющих сложного сигнала по дискретному спектру сложного сигнала, полученному быстрым преобразованием Фурье. В предложенных алгоритмах используются априорные данные (объем реализации и шаг дискретизации) и измеренные или вычисленные данные (действительные и мнимые части отсчетов спектра, лежащих около наибольших максимумов модуля спектра).*

*Проведено моделирование работы предложенного алгоритма. Моделировался суммарный сигнал, состоящий из семи синусоид с единичными амплитудами, разными частотами и фазами. Шум канала моделировался добавлением нормально распределенной случайной величины к точному отсчету суммарного сигнала, а помеха 50 Гц – добавлением реализации синусоиды со случайной амплитудой и фазой. Определение параметров слагаемых синусоид осуществлялось двумя итерационными способами. При первом способе суммарный спектр сигнала рассматривался как сумма спектров семи независимых сигналов; при втором способе – как сумма спектров независимых пар сигналов. Погрешности определения фаз не превосходили 3 %, а погрешности измерения амплитуд и частот – 1 %.*

*Проведенное исследование может служить теоретическим обоснованием алгоритма измерения амплитуд, частот и фаз конечного числа простых периодических составляющих сложного сигнала с помощью быстрого преобразования Фурье при отсутствии априорных сведений о параметрах сигнала с использованием только действительных и мнимых составляющих дискретного спектра сигнала.*

**Ключевые слова:** быстрое преобразование Фурье, простой периодический сигнал, амплитуда, частота, фаза, спектр сигнала.

**Введение**  
**А**ктуальной задачей применения цифровых измерительных систем является оценка параметров входного сигнала, то есть разложение его на простые составляющие, определение их параметров, физической природы и идентификация источников сигнала (например, измерение векторов гармонического сигнала на фоне периодических помех). При этом проводятся дискретные цифровые измерения сигналов и используются короткие реализации реальных сигналов, что важно для исследования нелинейных и нестационарных процессов. В связи с этим возникает проблема создания таких методик и алгоритмов обработки сигналов, которые обеспечивают необходимую точность и требуют наименьших вычислительных затрат (времени обработки) этих реализаций.

Для оценки параметров входного сигнала используются разные методы оценки стационарных, нестационарных и нелинейных данных, которые базируются на простом предположении, что любые сигналы состоят из разнообразных простых внутренних видов колебаний

и различаются априорными и адаптивными базами разложения [1–3]. Для анализа квазидетерминированных и случайных дискретных электрических измерительных сигналов во многих предметных областях проблемой является конечность интервала измерения и скрытые периодические, почти периодические и ангармонические сигналы, что требует применения наряду с временной формой также частотной и частотно-временной форм представления [4]. Например, если частоты составляющих известны, то для определения неизвестных амплитуд и фаз сложного сигнала можно применить алгоритм, использующий дискретное синус-косинус преобразование Фурье [5]. В работе [6] рассмотрен цифровой способ определения начальной фазы гармонического сигнала при частоте отсчетов меньше частоты Найквиста. При флуктуациях параметров гармонических составляющих в работе [7] получены оценки средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний и аналитические выражения для распределения указанной оценки.

Метод, использующий быстрое преобразование Фурье (БПФ), позволяет проводить разбиение и оценку параметров составляющих входного сигнала и дает устойчивое разложение сигнала на простые составляющие при отсутствии априорных сведений о частотах составляющих суммарного сигнала. В работе [8] описан алгоритм оценки амплитуды, а в работе [9] приведен сложный алгоритм вычисления амплитуд и фаз исследуемого сигнала из двух составляющих.

Цель данного исследования – построение алгоритма оценок амплитуд, частот и фаз произвольного числа простых периодических составляющих входного сигнала при спектральном анализе с использованием БПФ при отсутствии априорных сведений об измеряемых параметрах реализации сигнала. В качестве информативных данных для проведения вычислений используются ближайшие отсчеты околорезонансных максимумов модуля спектра, следовательно, наличие экстремумов в спектре, как и наличие экстремумов в сигнале для метода ННТ [10], позволяет разбить сигнал на простые составляющие.

#### Алгоритм оценки параметров входных сигналов

Рассмотрим алгоритм оценки амплитуд, частот и фаз периодических составляющих короткой реализации входного в общем случае нестационарного сигнала на примере сигнала в виде суммы синусоид с неизвестными произвольными частотами, амплитудами и фазами:

$$A(t) = \sum_{n=1}^{N_s} A_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n), \quad (1)$$

где  $\Omega_n$  – круговые частоты;  $A_n$  – амплитуды;  $\varphi_n$  – фазы простых составляющих суммарного сигнала;  $N_s$  – число слагаемых (простых сигналов). Эти величины считаются постоянными на длине короткой реализации суммарного сигнала.

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega_k) = & \frac{T\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N_s} A_n \left\{ \frac{\sin((\Omega_n - \omega_k)0,5T)}{\sin((\Omega_n - \omega_k)0,5T\varepsilon)} \exp[j(\Omega_n - \omega_k)0,5T(1-\varepsilon) + (j\varphi_n)] + \right. \\ & \left. + \frac{\sin((\Omega_n + \omega_k)0,5T)}{\sin((\Omega_n + \omega_k)0,5T\varepsilon)} \exp[-j(\Omega_n + \omega_k)0,5T(1-\varepsilon) - (j\varphi_n)] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varepsilon = \Delta t/T$ . Заметим, что, как правило, длительность реализации  $T$  при корректных измерениях значительно больше времени дискретизации  $\Delta t$ ,  $T \gg \Delta t$  или  $\varepsilon \ll 1$ , что будет использовано далее.

Первичная оценка значений спектра на дискретном множестве частот, полученная после оцифровки сигнала, при прямоугольном временном окне и алгоритме БПФ

$$\tilde{S}(\omega_k) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K_N(\omega - \omega_k) d\omega, \quad (2)$$

где  $S(\omega)$  – спектр сигнала;  $\omega_k = \Delta\omega k$  – дискретная частота;  $\Delta\omega = 2\pi/T$  – (шаг) разрешение по частоте;  $T = \Delta t N$  – длина реализации (время измерения);  $\Delta t$  – шаг дискретизации по времени;  $N$  – число отсчетов сигнала (объем выборки);  $k \in [0, N-1]$  – номер отсчета спектра, полученного БПФ.

Здесь

$$K_N(\omega - \omega_k) = \frac{\exp(j(\omega - \omega_k)T) - 1}{\exp(j(\omega - \omega_k)\Delta t) - 1} \quad (3)$$

есть функция основного спектрального окна при БПФ, определяющая точность первичной оценки спектра с помощью БПФ.

Спектр бесконечного сигнала вида (1) определяется выражением [11]

$$\begin{aligned} S(\omega) = & \sum_{n=1}^{N_s} \pi A_n [\delta(\Omega_n - \omega) \exp(j\varphi_n) + \\ & + \delta(\Omega_n - \omega) \exp(-j\varphi_n)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция Дирака.

Выражение для спектра, полученного БПФ от конечной реализации сигнала согласно (2)–(4), примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega_k) = & \sum_{n=1}^{N_s} \frac{\Delta t}{2} A_n (K_N(\Omega_n - \omega_k) \exp(j\varphi_n) + \\ & + K_N(-\Omega_n - \omega_k) \exp(-j\varphi_n)). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (3) для функции основного спектрального окна при БПФ, выражение (5) приведем к виду

Пусть частоты сигналов  $\Omega_n = m_n \Delta\omega + \alpha_n \Delta\omega$ , где  $m_n = \text{round}(\Omega_n / \Delta\omega)$  – ближайшая целая часть отношения круговых частот сигналов к разрешению по частоте;  $\text{round}()$  – оператор

округления до ближайшего целого;  $\alpha_n$  – дробные части отношения круговых частот сигналов к величине  $\Delta\omega$  (погрешность округления). Дробная часть удовлетворяет соотношению

$|\alpha| \leq 0,5$  и является случайной величиной, распределенной по равномерному закону [12].

Выражение (6) представим в виде суммы действительной и мнимой частей спектра

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega_k) = X_k + jY_k = \frac{T\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N_s} A_n \left\{ \frac{\sin((\alpha_n \pi) \cos(\Psi_n)) \sin(2(m_n + \alpha_n) \pi \varepsilon)}{\sin((m_n + \alpha_n + k) \pi \varepsilon) \sin((m_n + \alpha_n - k) \pi \varepsilon)} + \right. \\ \left. + 2 \sin(\alpha_n \pi) \sin(\Psi_n) + j \frac{\sin(\alpha_n \pi) \sin(\Psi_n) \sin(2k \pi \varepsilon)}{\sin((m_n + \alpha_n + k) \pi \varepsilon) \sin((m_n + \alpha_n - k) \pi \varepsilon)} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Psi_n = \varphi_n + \alpha_n \pi$ .

Выражение (8) представим в виде, удобном для дальнейших преобразований:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega_k) = X_k + jY_k = T\varepsilon \sum_{n=1}^{N_s} A_n \left\{ \frac{\sin((\alpha_n \pi) \cos(\Psi_n)) \sin(2(m_n + \alpha_n) \pi \varepsilon)}{\cos(2k \pi \varepsilon) - \cos(2(m_n + \alpha_n) \pi \varepsilon)} + \right. \\ \left. + \sin(\alpha_n \pi) \sin(\Psi_n) + j \frac{\sin(\alpha_n \pi) \sin(\Psi_n) \sin(2k \pi \varepsilon)}{\cos(2k \pi \varepsilon) - \cos(2(m_n + \alpha_n) \pi \varepsilon)} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть сигнал состоит из одной синусоиды. Параметры синусоиды в этом случае находятся из простых соотношений для отсчетов действительной и мнимой части спектра с номерами  $k, k \pm 1$  согласно (8):

$$\begin{aligned} X_k (\cos(2k \pi \varepsilon) - d_1) &= A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) [\cos(\Psi_1) b_1 + \sin(\Psi_1) (\cos(2k \pi \varepsilon) - d_1)]; \\ Y_k (\cos(2k \pi \varepsilon) - d_1) &= A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) \sin(2k \pi \varepsilon); \\ X_{k \pm 1} (\cos(2(k \pm 1) \pi \varepsilon) - d_1) &= A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) [\cos(\Psi_1) b_1 + \sin(\Psi_1) (\cos(2(k \pm 1) \pi \varepsilon) - d_1)]; \\ Y_{k \pm 1} (\cos(2(k \pm 1) \pi \varepsilon) - d_1) &= A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) \sin(2(k \pm 1) \pi \varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $d_1 = \cos(2(m_1 + \alpha_1) \pi \varepsilon)$ ;  $b_1 = \sin(2(m_1 + \alpha_1) \pi \varepsilon) = \sqrt{1 - d_1^2}$ .

Получим согласно (9) отчеты спектра  $X_k$  с номерами  $k+1$  и  $k-1$ . Сложим отчеты спектра с номерами  $k+1$  и  $k-1$ , получим

$$\begin{aligned} X_{k+1} [\cos(2(k+1) \pi \varepsilon) - d_1] + X_{k-1} [\cos(2(k-1) \pi \varepsilon) - d_1] = \\ = 2A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) [\cos(\Psi_1) b_1 + \sin(\Psi_1) (\cos(2k \pi \varepsilon) \cos(2 \pi \varepsilon) - d_1)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Или согласно (9)

$$\begin{aligned} \left\{ X_{k+1} [\cos(2(k+1) \pi \varepsilon) - d_1] + X_{k-1} [\cos(2(k-1) \pi \varepsilon) - d_1] \right\} / \cos(2k \pi \varepsilon) = \\ = 2X_k (\cos(2k \pi \varepsilon) - d_1) / \cos(2k \pi \varepsilon) + 2A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) (\cos(2 \pi \varepsilon) - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Пользуясь условием  $\varepsilon \ll 1$ , можем положить, что  $\cos(2 \pi \varepsilon) \approx 1$ , и затем, используя (11), получим замкнутое уравнение для нахождения параметра  $d_1$ :

$$X_{k+1} [\cos(2(k+1) \pi \varepsilon) - d_1] + X_{k-1} [\cos(2(k-1) \pi \varepsilon) - d_1] = 2X_k [(\cos(2k \pi \varepsilon) - d_1)]. \quad (12)$$

Рассмотрим далее отчеты спектра  $X_k$  с номерами  $k^*+1$  и  $k^*-1$ . Сложим отчеты спектра с номерами  $k^*+1$  и  $k^*-1$ , получим согласно (11)

$$\begin{aligned} & \left\{ X_{k+1} \left[ \cos(2(k^* + 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right] + X_{k-1} \left[ \cos(2(k^* - 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right] \right\} / \cos(2k^*\pi\varepsilon) = \\ & = 2X_k \left( \cos(2k^*\pi\varepsilon) - d_1 \right) / \cos(2k^*\pi\varepsilon) + 2A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) (\cos(2\pi\varepsilon) - 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Вычтем из выражения (11) выражение (13), получим замкнутое точное уравнение для нахождения параметра  $d_1$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ X_{k+1} \left[ \cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_1 \right] + X_{k-1} \left[ \cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_1 \right] \right\} / \cos(2k\pi\varepsilon) - \\ & - \left\{ X_{k+1} \left[ \cos(2(k^* + 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right] + X_{k-1} \left[ \cos(2(k^* - 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right] \right\} / \cos(2k^*\pi\varepsilon) = \\ & = 2X_k \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) / \cos(2k\pi\varepsilon) - 2X_k \left( \cos(2k^*\pi\varepsilon) - d_1 \right) / \cos(2k^*\pi\varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

При использовании отсчетов  $Y_k$  замкнутое точное уравнение для нахождения параметра  $d_1$  имеет вид согласно (9)

$$Y_k \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) \sin(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) = Y_{k \pm 1} \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right) \sin(2k\pi\varepsilon). \quad (15)$$

Выбор номера отсчета  $k = m_1$  в уравнениях (12), (15) на максимуме спектра позволяет уменьшить влияние шумов и ошибок округления, а выбор уравнений для определения параметра  $d_1$  зависит от величин действительной и мнимой частей спектра. Использование точного уравнения (14) ограничено величиной шума, поскольку приходится брать отсчет  $k^*$  рядом с максимумом спектра. Используя вычисленное

значение параметра  $d_1$ , найдем из соотношения  $d_1 = \cos(2(m_1 + \alpha_1)\pi\varepsilon)$  параметр  $\alpha_1$ , а из уравнений (9) произведения  $A_1 \cos(\Psi_1)$ ;  $A_1 \sin(\Psi_1)$ . Эти произведения позволяют получить фазу и амплитуду сигнала.

Построим алгоритм вычисления параметров двух синусоид по отсчетам спектра суммарного сигнала. Согласно (8) действительную и мнимую части спектра можно записать в виде

$$\begin{aligned} & X_k \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_2 \right) = \\ & = A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \left[ \cos(\Psi_1) b_1 \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_2 \right) + \sin(\Psi_1) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_2 \right) \right] + \\ & + A_2 \sin(\alpha_1 \pi) T \varepsilon \left[ \cos(\Psi_2) b_2 \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) + \sin(\Psi_2) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Y_k \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_2 \right)}{\sin(2k\pi\varepsilon)} = \\ & = A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_2 \right) + A_2 T \varepsilon \sin(\alpha_2 \pi) \sin(\Psi_2) \left( \cos(2k\pi\varepsilon) - d_1 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $d_2 = \cos(2(m_2 + \alpha_2)\pi\varepsilon)$ ;  $b_2 = \sin(2(m_2 + \alpha_2)\pi\varepsilon)$ .

Отсчеты действительной (16) и мнимой (17) частей спектра в точках  $k+1$  и  $k-1$ :

$$\begin{aligned} & X_{k \pm 1} \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right) \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_2 \right) = \\ & = A_1 T \varepsilon \left[ \sin(\alpha_1 \pi) \cos(\Psi_1) b_1 \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_2 \right) + \right. \\ & \left. + \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right) \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_2 \right) \right] + \\ & + A_2 T \varepsilon \left[ \sin(\alpha_2 \pi) \cos(\Psi_2) b_2 \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right) + \right. \\ & \left. + \sin(\alpha_2 \pi) \sin(\Psi_2) \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_2 \right) \left( \cos(2(k \pm 1)\pi\varepsilon) - d_1 \right) \right]; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{Y_{k\pm 1}(\cos(2(k\pm 1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k\pm 1)\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2(k\pm 1)\pi\varepsilon)} =$$

$$= A_1 T \varepsilon \sin(\alpha_1 \pi) \sin(\Psi_1) (\cos(2(k\pm 1)\pi\varepsilon) - d_2) + A_2 T \varepsilon \sin(\alpha_2 \pi) \sin(\Psi_2) (\cos(2(k\pm 1)\pi\varepsilon) - d_1). \quad (19)$$

Разложим аналогично в правой части выражения (19)  $\cos(2(k\pm 1)\pi\varepsilon) = \cos(2k\pi\varepsilon)\cos(2\pi\varepsilon) \mp \sin(2k\pi\varepsilon)\sin(2\pi\varepsilon)$  и, пользуясь условием  $\varepsilon \ll 1$ , полагаем  $\cos(2\pi\varepsilon) \approx 1$ . Складывая отсче-

ты мнимой части спектра с номерами  $k+1$  и  $k-1$  и пользуясь выражением (17), получим замкнутое уравнение для нахождения параметров  $d_1, d_2$ :

$$\begin{aligned} & Y_{k+1}(\cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_2)(\cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_1) / \sin(2(k+1)\pi\varepsilon) + \\ & + Y_{k-1}(\cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_2)(\cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_1) / \sin(2(k-1)\pi\varepsilon) = \\ & = 2Y_k(\cos(2k\pi\varepsilon) - d_2)(\cos(2k\pi\varepsilon) - d_1) / \sin(2k\pi\varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Для получения замкнутого уравнения по действительным отсчетам спектра вычисляются отсчеты действительной части спектра с номерами  $k^*+1$  и  $k^*-1$ , при условии  $\cos(2\pi\varepsilon) \approx 1$  они преобразуются и складываются:

$$\begin{aligned} & [X_{k+1}(\cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_2) + X_{k-1}(\cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_2) - \\ & - 2X_k(\cos(2k\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2k\pi\varepsilon) - d_2)] \sin(2k^*\pi\varepsilon)^2 - \\ & - [X_{k^*+1}(\cos(2(k^*+1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k^*+1)\pi\varepsilon) - d_2) + X_{k^*-1}(\cos(2(k^*-1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k^*-1)\pi\varepsilon) - d_2) - \\ & - 2X_{k^*}(\cos(2k^*\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2k^*\pi\varepsilon) - d_2)] \sin(2k\pi\varepsilon)^2 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя отсчеты мнимой части спектра в точках с номерами  $k+1$ ,  $k-1$  и  $k^*+1$ ,  $k^*-1$ , можно получить точное замкнутое уравнение для мнимых отсчетов спектра:

$$\begin{aligned} & \frac{Y_{k+1}(\cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k+1)\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2(k+1)\pi\varepsilon)\cos(2k\pi\varepsilon)} - \frac{Y_{k^*+1}(\cos(2(k^*+1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k^*+1)\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2(k^*+1)\pi\varepsilon)\cos(2k^*\pi\varepsilon)} + \\ & + \frac{Y_{k-1}(\cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k-1)\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2(k-1)\pi\varepsilon)\cos(2k\pi\varepsilon)} - \frac{Y_{k^*-1}(\cos(2(k^*-1)\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2(k^*-1)\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2(k^*-1)\pi\varepsilon)\cos(2k^*\pi\varepsilon)} = \\ & = \frac{Y_k(\cos(2k\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2k\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2k\pi\varepsilon)\cos(2k\pi\varepsilon)} - \frac{Y_{k^*}(\cos(2k^*\pi\varepsilon) - d_1)(\cos(2k^*\pi\varepsilon) - d_2)}{\sin(2k^*\pi\varepsilon)\cos(2k^*\pi\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение системы уравнений (20), (21) можно провести следующим образом. Поскольку относительно произведения  $d_1 d_2$  и суммы  $d_1 + d_2$  мы имеем линейную систему уравнений, то, решая ее, найдем указанные величины. В этом случае согласно теореме Виета [13] можно построить квадратное уравнение для нахождения величин  $d_1, d_2$ . Далее мы вычисляем корни квадратного уравнения  $d_1, d_2$  и определяем параметры  $\alpha_1, \alpha_2$  из соотношений  $d_n = \cos(2(m_n + \alpha_n)\pi\varepsilon)$ . Ис-

пользуя соотношения (16), (17) для действительной части спектра в точках  $k = m_1$  и  $k = m_2$  и найденные из уравнений (20) и (21) величины  $\alpha_1, \alpha_2$ , получим четыре уравнения для четырех неизвестных. Из них найдем произведения  $A_1 \cos(\Psi_1); A_2 \cos(\Psi_2)$ ,  $A_1 \sin(\Psi_1); A_2 \sin(\Psi_2)$ . Эти произведения позволяют получить фазы и амплитуды сигналов. В качестве значений номеров точек  $k$  берутся номера  $m_1, m_2$  максимумов спектра, поскольку это позволяет умень-

шить влияние шумов и ошибок округления на определение фаз и амплитуд сигналов.

Проведя аналогичные рассуждения, можно получить систему уравнений для нахождения параметров слагаемых суммы трех и более синусоид. Но проведенное компьютерное моделирование показало, что для определения параметров слагаемых суммы произвольного числа синусоид с погрешностью в интервале [3 % 1 %] можно ограничиться только выражениями (13), (15) и (20), (21).

### Моделирование

Для проверки работы алгоритма было проведено компьютерное моделирование. Моделировался суммарный сигнал, состоящий из семи слагаемых синусоид с частотами 321, 353, 463, 537, 837, 1237, 2233 Гц, амплитудами, равными единице, и фазами, равными, соответственно,  $1, \pi/3, \pi/7, 3\pi/2, \pi/5, \pi/3, 1$ . Шум канала моделировался добавлением нормально распределенной случайной величины к точному отсчету суммарного сигнала, а помеха 50 Гц – добавлением реализации синусоиды со случайной амплитудой и фазой. Малый параметр  $\varepsilon = \Delta t/T = 2,5E-4$  выбирался таким, чтобы погрешность определения фаз синусоид не превышала 3 % при отсутствии шума и помех. Далее моделировался сигнал с частотами в десять раз большими начального случая, а длина реализации  $T$  уменьшалась

в десять раз, что фиксировало параметр  $\varepsilon = \Delta t/T = 2,5E-4$ .

На рис. 1 приведен вид части суммарного сигнала, образованного суммой синусоид с единичными амплитудами и частотами 321, 353, 463, 537, 837, 1237, 2233 Гц соответственно.

На рис. 2 приведен вид части суммарного сигнала и нормального шума с СКЗ  $\sigma = 1$ .

На рис. 3 приведен амплитудный спектр суммарного сигнала с добавленным нормальным шумом с СКЗ  $\sigma = 1$ . По оси абсцисс отложены порядковые номера отсчетов спектра.

Определение параметров слагаемых синусоид проходило двумя способами.

При первом способе используются уравнения (11), (13), полученные для сигнала из одной синусоиды, т. е. суммарный спектр сигнала рассматривался как сумма спектров семи независимых сигналов. Параметр  $k$  в выражениях (11), (13) последовательно менялся от  $m_1$  до  $m_7$ .

При втором способе используются уравнения (19), (20), полученные для суммарного сигнала из двух синусоид, т. е. спектр суммарного сигнала рассматривается как сумма спектров независимых пар сигналов. Параметр  $k$  в выражении (20) последовательно выбирался парами  $m_1, m_2; m_2, m_3; m_3, m_4$  от  $m_1$  до  $m_7$ , а в выражении (21) параметры  $k$  и  $k^*$  последовательно выбирались парами  $m_1, m_2; m_2, m_3; m_3, m_4$  и т. д.

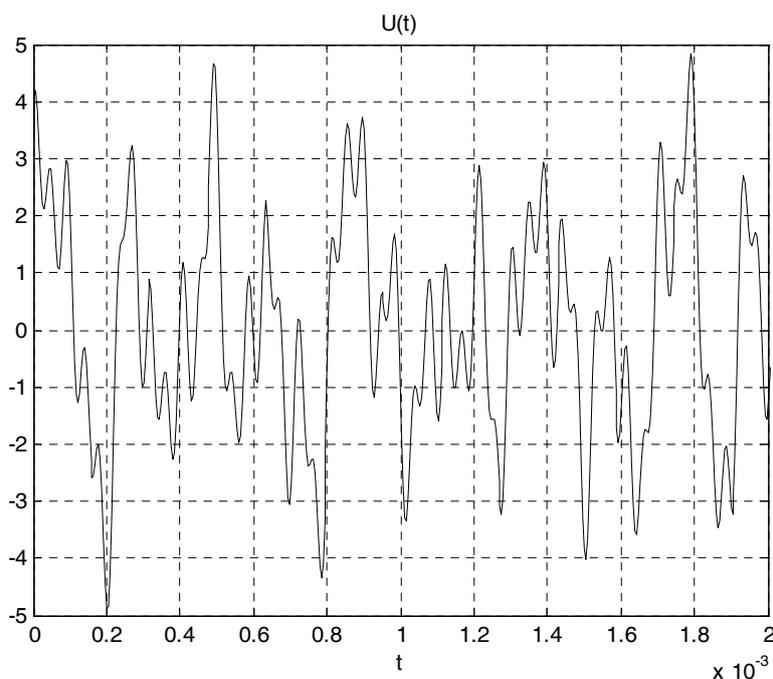


Рис. 1. Вид суммарного сигнала, образованного семью синусоидами

Fig. 1. Kind of the total signal formed by seven sinusoids

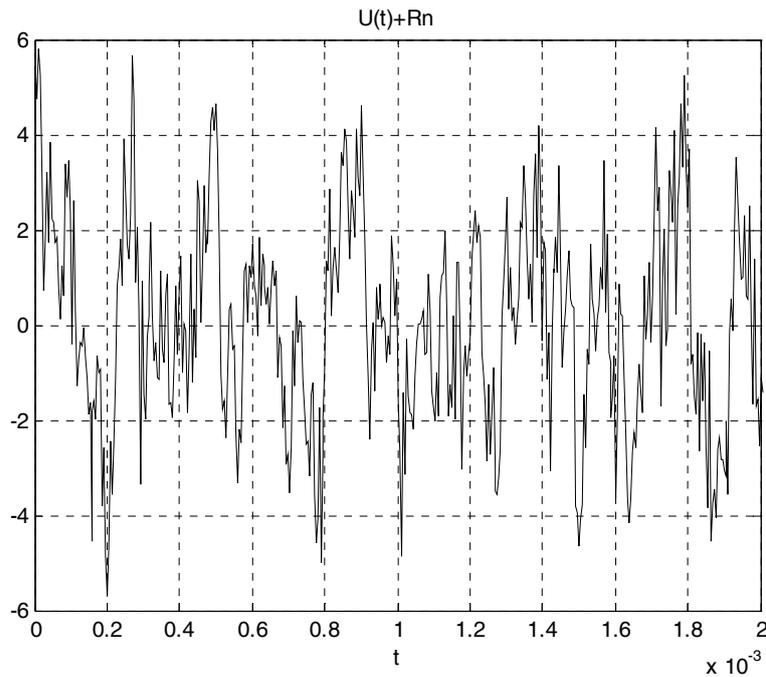


Рис. 2. Вид суммарного сигнала с добавлением нормального шума

Fig. 2. Kind of a total signal with addition of normal noise

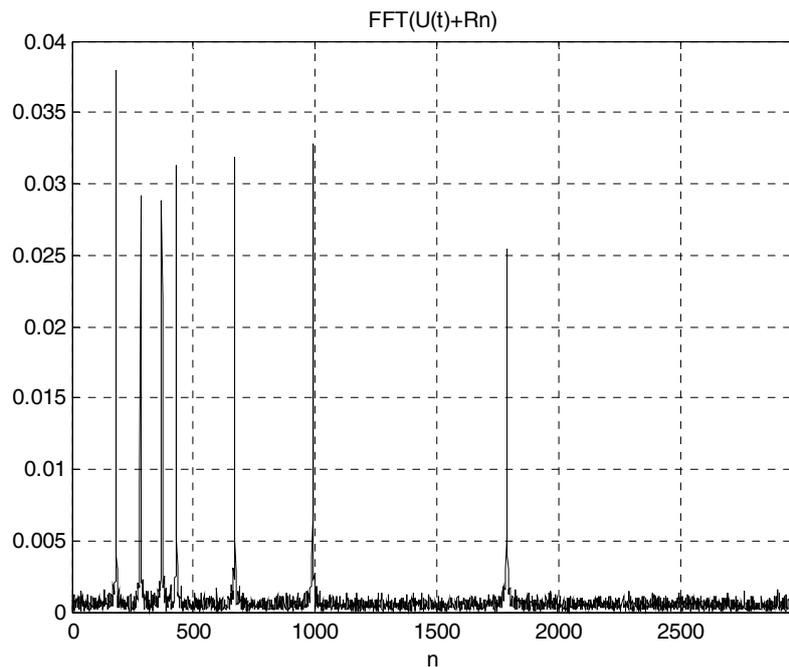


Рис. 3. Вид спектра суммарного сигнала с добавлением нормального шума

Fig. 3. Kind of a spectrum of a total signal with addition of normal noise

### Выводы

Из проведенного анализа и численного моделирования способов измерения амплитуд, частот и фаз составляющих суммарного сигнала следуют выводы:

– при выполнении условий корректной оцифровки сигналов, когда частота дискретизации  $\omega_D \geq 2\omega_m$  ( $\omega_m$  – максимальная частота спектра сигнала), передискретизация в два раза и более необходима для измерения амплитуд,

частот и фаз составляющих коротких реализаций суммарного сигнала с требуемой точностью;

– при отсутствии шумов в сигнале первый и второй способы позволяют с погрешностью не более 3 % измерять фазы составляющих сигнала по известным отсчетам действительной и мнимой частей спектра суммарного сигнала при  $\varepsilon = 2,5E - 4$ . Погрешность определения фазы вторым способом меньше примерно в 1,4 раза. Следует отметить, что величина измеренной фазы иногда может отличаться от действительной на величину  $\pm \pi$ , что связано с проведением вычислений обратных тригонометрических функций при реализации данного алгоритма;

– при отсутствии шумов в сигнале первый и второй способы позволяют с погрешностью не более 1 % измерять амплитуды и частоты составляющих сигнала по известным отсчетам действительной и мнимой частей спектра суммарного сигнала при  $\varepsilon = 2,5E - 4$ . Погрешность определения амплитуды и частоты вторым способом меньше примерно в 1,4 раза;

– при отсутствии помехи и шумов в сигнале уменьшение параметра  $\varepsilon$  в 10 раз приводит к уменьшению погрешности примерно в 3...5 раз. Причем погрешность вычисления по второму способу меньше примерно в 2 раза;

– разрядность АЦП, определяющая погрешность оцифровки и лежащая в пределах 10...14, обеспечивает приемлемую погрешность измерения параметров сигнала (дальнейшее увеличение разрядности АЦП не приводит к существенному уменьшению погрешности измерения);

– влияние сильной помехи, например, сигнала промышленной частоты 50 Гц, на погрешность измерения можно компенсировать использованием алгоритма определения амплитуд, фаз и частот составляющих простых периодических сигналов по спектру суммы сигнала и помехи, считая помеху дополнительной составляющей суммарного сигнала;

– шум в канале приводит к увеличению погрешности, и для ее уменьшения требуется увеличение объема выборки (длины реализации и частоты дискретизации), которое приводит к увеличению максимумов спектра и разрешения по частоте  $\Delta\omega$ . Погрешности измерения по первому и второму способам при больших значениях шума СКЗ  $\sigma = 1$ , равной амплитуде сигналов мало отличаются друг от друга и меньше 3 % при  $\varepsilon \leq 5E - 5$ ;

– отсутствие существенного уменьшения погрешности при использовании второго способа измерений объясняется тем, что в нем исполь-

зуются приближенные уравнения, а в первом случае – точные. Наличие шума приводит к тому, что использование шеститочечных  $k+1, k, k-1$  и  $k^*+1, k^*, k^*-1$  точных уравнений (22) не приводит к уменьшению погрешности, поскольку надо брать отсчеты рядом с максимумами спектра, а они относительно сильнее изменены шумом, чем отсчеты максимумов спектров.

Проведенное исследование может служить теоретическим обоснованием алгоритма измерения амплитуд, частот и фаз конечного числа простых периодических составляющих сложного сигнала с помощью БПФ при отсутствии априорных сведений о параметрах сигнала с использованием только действительных и мнимых составляющих дискретного спектра сигнала.

#### Библиографические ссылки

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 672 с.
2. Stéphane Mallat. A wavelet tour of signal processing: the sparse way. Academic Press, 2009, 805 p. ISBN 9780123743701.
3. Мелентьев В. С. Совершенствование методов измерений параметров сигналов по мгновенным значениям, разделенным в пространстве // Измерительная техника. 2017. № 1. С. 16–18.
4. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // Метрология. 2017. № 1. С. 20–32.
5. Казанцев Ю. И., Музалевский В. Е., Пругло А. В. Метрологическое обеспечение измерений коэффициента гармоник низкочастотных радиотехнических сигналов // Измерительная техника. 2013. № 8. С. 45–49.
6. Лазо Ю. Н., Турыгин В. С. Цифровой способ определения начальной фазы гармонического сигнала при частоте отсчетов меньше частоты Найквиста // Измерительная техника. 2019. № 7. С. 64–57.
7. Засыпкин Ю. А., Розина О. Ю. Оценка средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний при апертурной неопределенности аналого-цифрового преобразователя // Измерительная техника. 2018. № 10. С. 50–56.
8. Леньков С. В. Измерение амплитуд гармоник периодического сигнала с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье // Измерительная техника. 2006. № 2. С. 51–53.
9. Леньков С. В., Молин С. М. Измерение амплитуды, частоты и фазы периодических составляющих коротких реализаций суммарного сигнала с использованием быстрого преобразования Фурье // Метрология. 2009. № 10. С. 23–30.
10. Norden E. Huang, Samuel S.P. Shen. The Hilbert-Huang transform and its applications. World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., 2005, 311 p.

11. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М. : Высш. шк., 1988. 448 с.
12. Оппенгеймер А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М. : Техносфера, 2006. 856 с.
13. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Изд. 4-е. Москва : Наука, 1978. 831 с.

### References

1. Malla S. *Vejvlety v obrabotke signalov* [Wavelet in processing of signals]. Moscow, Mir Publ., 2005, 672 p. (in Russ.).
2. Stéphane Mallat. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*. Academic Press, 2009, 805 p. ISBN 9780123743701.
3. Melent'ev V.S. [Perfection of methods of measurements of parameters of signals on the instant values divided in space]. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2017, no. 1, pp. 16-18 (in Russ.).
4. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Tendencies of development of discrete indirect measurements of parameters of electric signals]. *Metrologiya*, 2017, no. 1, pp. 20-32 (in Russ.).
5. Kazancev Y.I., Muzalevskij V.E, Pruglo A.V. [Metrological maintenance of measurements of factor of harmonics of low-frequency radio engineering signals]. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2013, no. 8, pp. 45-49 (in Russ.).
6. Lazo Y.N., Turygin V.S. [The digital way of definition of an initial phase of a harmonious signal at

frequency of readout is less than frequency of Najkvista]. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2019, no. 7, pp. 64-57 (in Russ.).

7. Zasyrkin Y.A., Rozina O.Y. [Estimation of average capacity of a signal with fluctuation of phases of making harmonious fluctuations at aperture uncertainty of an analgo-digitizer]. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2018, no. 10, pp. 50-56 (in Russ.).

8. Len'kov S.V. [Measurement of amplitudes of harmonics of a periodic signal by means of algorithm of fast transformation of Fourier]. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2006, no. 2, pp. 51-53 (in Russ.).

9. Len'kov S.V., Molin S.M. [Measurement of amplitude, frequency and phase of periodic making short realisations of a total signal with use of fast transformation of Fourier]. *Metrologiya*, 2009, no. 10, pp. 23-30 (in Russ.).

10. Norden E. Huang, Samuel S.P. Shen. *The Hilbert-Huang transform and its applications*. World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., 2005, 311 p.

11. Baskakov S.I. *Radiotekhnicheskie cepi i signaly* [Radio engineering chains and signals]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988, 448 p. (in Russ.).

12. Oppengejmer A., Shafer R. *Cifrovaya obrabotka signalov* [Digital processing of signals]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2006, 856 p. (in Russ.).

13. Korn G.A., Korn T.M. *Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [The directory on the mathematician for science officers and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 831 p. (in Russ.).

### Measuring of Amplitudes, Frequencies and Phases of Simple Periodic Components of the Complex Signal at Spectral Analysis by Fast Fourier Transform

S.V. Len'kov, DSc in Engineering, Physical-Technical Institute, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia

*The method of estimation of amplitudes, frequencies and phases of final number of simple periodic components of a difficult signal on the discrete spectrum received by fast Fourier transformation (FFT) is offered. In order to apply the offered algorithms it is necessary to know only aprioristic data (the minimum volume of realization and the step of digitization) and the calculated data - the valid and imaginary parts of readout of the spectrum laying about the greatest maxima.*

*Modeling of the offered algorithm operation is carried out. The total signal consisting of seven sinusoids with individual amplitudes, different frequencies and phases was modeled. Channel noise was modeled by the addition of normally distributed random variable to the exact readout of the total signal, and the noise of 50 Hz – by the addition of realization of a sinusoid with the random amplitude and phase.*

*Definition of parameters of composed sinusoids was made by two iterative methods. At the first method the total spectrum of a signal was considered as the sum of spectra of seven independent signals. At the second method the spectrum of a total signal was considered as the sum of spectra of independent pairs of signals. Errors of phase definition did not surpass 3 %; and errors of measurement of amplitudes and frequencies did not surpass 1 %.*

*The study can serve as a theoretical foundation for the algorithm for measuring the amplitudes, frequencies, and phases of a finite number of simple periodic components of a complex signal using the fast Fourier transformation in the absence of a priori information about the signal parameters using only real and imaginary components of the discrete spectrum of the signal.*

**Keywords:** fast Fourier transformation, simple periodic signal, amplitude, frequency, phase, signal spectrum.

Получено 11.11.2019

**Образец цитирования**

Леньков С. В. Измерение амплитуд, частот и фаз простых периодических составляющих сложного сигнала при спектральном анализе с использованием быстрого преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2019. Т. 22, № 4. С. 83–92. DOI: 10.22213/2413-1172-2019-4-83-92.

**For Citation**

Len'kov S.V. [Measuring of Amplitudes, Frequencies and Phases of Simple Periodic Components of the Complex Signal at Spectral Analysis by Fast Fourier Transform]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2019, vol. 22, no. 4, pp. 83-92 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2019-4-83-92.