

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

УДК 621.833

DOI: 10.22213/2413-1172-2021-2-15-20

Методика обобщенного подхода к синтезу кулачковых механизмов

Н. Н. Крохмаль, кандидат технических наук, доцент, Курганский государственный университет, Курган, Россия

Рассматривается методика применения уравнения геометрической связи звеньев в высшей кинематической паре кулачкового механизма для проведения полного синтеза механизма. Отличительной особенностью методики является то, что уравнение геометрической связи и уравнение огибающей записаны в декартовой системе координат. Уравнение огибающей выведено из уравнения связи. Все преобразования и решение исходного уравнения связи и уравнения огибающей проводятся методом матриц в декартовой системе координат без перехода к другим системам координат и к графическим методам или их интерпретации. Показано, что такой подход позволяет сразу получить координаты точек рабочих профилей кулачка и теоретического профиля кулачка на основе единой математической модели. Известные расчетные зависимости параметров кулачковых механизмов также получены на основе единой математической модели в отличие от существующих методик, в которых применяются различные математические модели для решения задач синтеза кулачковых механизмов. Предложенная методика упрощает алгоритм решения поставленной задачи и его программную реализацию.

Проведено тестирование программного обеспечения, созданного на основе разработанной методики. Особенность методики заключается в применении единых существующих способов преобразований координат для решения системы уравнений, описывающих теоретический и рабочие профили кулачка. Это обеспечивает простоту и однозначность вычислений. Корректность методики проверена путем тестирования соответствующего программного обеспечения в пакете Math Cad. Универсальность базовых положений предлагаемого подхода позволяет применить разработанную методику для синтеза любых видов плоских кулачковых механизмов. Результаты тестирования позволяют утверждать, что методика является корректной и имеет перспективы для развития.

Ключевые слова: кулачковые механизмы, высшая кинематическая пара, уравнение механической связи, преобразования координат, синтез.

Введение

Технология производства кулачков в настоящее время основана на использовании оборудования с числовым программным управлением. Эта технология обеспечивает высокую точность изготовления профиля кулачка. В связи с высоким качеством и культурой производства на этапе проектирования кулачкового механизма должна быть обеспечена высокая и надежная точность вычислений точек профиля кулачка. Этому требованию удовлетворяет аналитический метод расчета координат точек профиля кулачка.

В фундаментальных обзорах [1–5] рассмотрены существующие методы решения задачи (по Ф. Л. Литвину [6]) синтеза трехзвенного механизма, осуществляющего передачу зацеплением. Широко применяемым методом решения задачи синтеза сопряженного профиля зацепления являются дифференциальные методы,

включая кинематический. Различия между вариантами заключаются в форме задания уравнений, описывающих механические связи звеньев, образующих высшую кинематическую пару [7–9].

В статьях [10, 11] уравнения связи представлены как параметрические с параметром – углом давления в точке контакта профилей. В статьях [12, 13] уравнения связи даны в форме параметрических с параметром – углом поворота кулачка и кинематическим уравнением – относительной скорости звеньев в точке контакта.

В работах [14, 15] рассмотрен дифференциальный метод решения задачи анализа зацепления с применением кинематического уравнения связи. Там же отмечено, что уравнение кривой линии на плоскости может быть задано в явном виде, в неявном виде, а также в параметрическом.

Все приведенные выше методики синтеза профилей кулачков характеризуются тем, что

в одной методике для математической модели механизмов используются разные виды координатных систем – прямоугольные и полярные, что при определенных параметрах и условиях приводит к неточностям вычислений. Каждая методика определяет по-своему знаки «плюс» и «минус», связанные с расположением и направлением движения толкателя и кулачка, что приводит к путанице и ошибкам.

Цель работы – формирование единого логически связанного подхода к решению задачи полного синтеза кулачковых механизмов на основе выбора оптимального варианта дифференциального метода.

Математическая модель кулачкового механизма

Покажем, что из одного уравнения механической связи можно получить все необходимые расчетные зависимости для синтеза кулачкового механизма. Для определенности рассуждений методику рассмотрим на примере плоского кулачкового механизма с вращающимся кулачком и поступательно движущимся роликовым толкателем.

Рассмотрим схему зацепления кулачка и ролика толкателя (рисунок).

Выберем следующие системы координат, связанные со звеньями: $X1, Y1$ – система координат кулачка; $X2, Y2$ – система координат толкателя; $X3, Y3$ – система координат стойки. Ролик образует семейство окружностей, а профиль кулачка является огибающей кривой линии к этому семейству в системе координат кулачка.

Уравнение окружности ролика толкателя в системе координат I , связанной с кулачком, представляется следующим образом:

$$(x_{B1} - x_{C1})^2 + (y_{B1} - y_{C1})^2 = r^2, \quad (1)$$

где x_{B1}, y_{B1} – координаты точки контакта кулачка и ролика, которые зависят от углового положения кулачка – параметра φ ; x_{C1}, y_{C1} – координаты центра ролика, которые зависят от углового положения кулачка – параметра φ ; r – радиус ролика толкателя.

Возьмем производные по параметру φ от координат центра ролика в уравнении связи (1). В результате получим уравнение огибающей к семейству окружностей ролика:

$$(x_{B1} - x_{C1})x'_{C1} + (y_{B1} - y_{C1})y'_{C1} = 0, \quad (2)$$

где $x'_{C1} = \frac{dx_{C1}}{d\varphi}$; $y'_{C1} = \frac{dy_{C1}}{d\varphi}$ – проекции аналога скорости центра ролика.

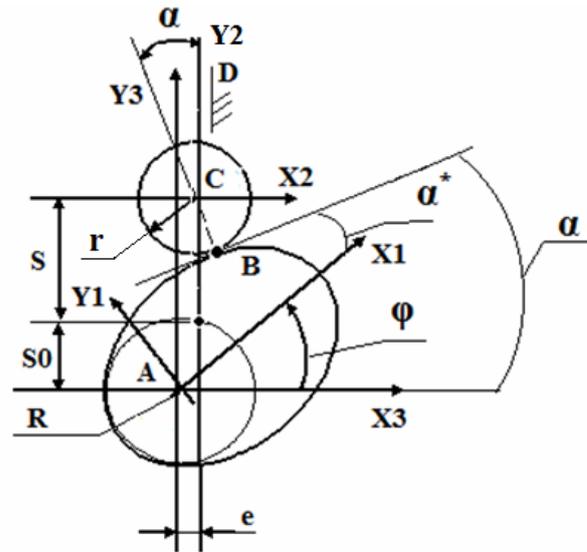


Схема кулачкового механизма: $X1, Y1$ – система координат, связанная с кулачком; $X2, Y2$ – система координат, связанная с толкателем; $X3, Y3$ – система координат, связанная со стойкой; α – угол давления; φ – угол поворота кулачка; α^* – вспомогательный угол; e – эксцентриситет механизма; R – радиус основной окружности кулачка; r – радиус ролика толкателя; S – перемещение толкателя; $S0$ – начальное положение толкателя; A, B, C, D – точки расположения кинематических пар механизма

Scheme cam mechanism: $X1, Y1$ - coordinate system associated with the cam; $X2, Y2$ - coordinate system associated with the pusher; $X3, Y3$ - coordinate system associated with the rack; α - pressure angle; φ - angle of rotation of the cam; α^* - auxiliary angle; e - eccentricity of the mechanism; R - radius of the main circle of the cam; r - radius of the pusher roller; S - movement of the pusher; $S0$ - initial position of the pusher; A, B, C, D - points of location of kinematic pairs of the mechanism

Уравнения (1) и (2) образуют систему относительно координат точки контакта кулачка и ролика. Решение данной системы уравнений относительно x_{B1}, y_{B1} дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} x_{B1} &= x_{C1} + \frac{ry'_{C1}}{\mp \sqrt{x'_{C1}{}^2 + y'_{C1}{}^2}}; \\ y_{B1} &= y_{C1} + \frac{rx'_{C1}}{\mp \sqrt{x'_{C1}{}^2 + y'_{C1}{}^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от известной методики будем использовать для дальнейших рассуждений тот же вид системы координат – декартову прямоугольную. Это обстоятельство формирует единый подход для выполнения полного геометрического синтеза по крайней мере плоских кулачковых механизмов.

Координаты центра ролика в системе координат I (см. рисунок) являются функциями угла положения кулачка φ и определяют закон движения толкателя: $x_{C1} = x_{C1}(\varphi)$; $y_{C1} = y_{C1}(\varphi)$.

В соответствии с расчетной схемой (см. рисунок) координаты центра ролика – точка C в системе координат $З$ – определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{C3} &= e; \\ y_{C3} &= S_0 + S, \end{aligned} \quad (4)$$

где $S = S(\varphi)$ – перемещение толкателя; $S_0 = \sqrt{R^2 - e^2}$ – начальное положение толкателя; R – радиус основной окружности кулачка; e – эксцентриситет кулачкового механизма.

Координаты центра ролика – точка C в системе координат кулачка I – определяются в результате следующего преобразования:

$$\begin{pmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{13} \begin{pmatrix} x_{C3} \\ y_{C3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $M_{13} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – известная из мо-

нографии Литвина Ф. Л. или, например, монографии [16] матрица преобразования координат точки из системы координат стойки $З$ в систему координат кулачка I .

Проекция аналога скорости центра ролика – точки C в системе координат I – определяется следующим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} x'_{C1} \\ y'_{C1} \\ 1 \end{pmatrix} = M'_{13} \begin{pmatrix} x_{C3} \\ y_{C3} \\ 1 \end{pmatrix} + M_{13} \begin{pmatrix} x'_{C3} \\ y'_{C3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $M'_{13} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – известная мат-

рица преобразования аналогов скоростей точки из системы координат стойки $З$ в систему координат кулачка I .

Алгоритм синтеза кулачкового механизма

Таким образом, алгоритм расчета координат теоретического и рабочего профиля кулачка состоит из следующих действий:

- задать в качестве исходных данных закон движения толкателя $S = S(\varphi)$, эксцентриситет e , радиус основной окружности кулачка R и направление вращения кулачка;

- вычислить координаты центра ролика по формулам (4) в системе координат стойки;

- вычислить аналоги скоростей центра ролика – точки C в системе координат стойки

$$\begin{pmatrix} x'_{C3} \\ y'_{C3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S' \\ 1 \end{pmatrix};$$

- выполнить преобразование координат центра ролика из системы координат $З$ в систему координат I по формулам (5) – теоретический профиль кулачка;

- вычислить аналоги скоростей центра ролика в системе координат I по формулам (6);

- вычислить координаты точек рабочего профиля кулачка (наружного или внутреннего) по формулам (3).

Рассмотрим оригинальную методику определения угла давления в кулачковом механизме в рамках излагаемого аналитического подхода. Для этого представим уравнение огибающей (2) в следующем виде:

$$-\frac{(x_{B1} - x_{C1})}{(y_{B1} - y_{C1})} = \frac{y'_{C1}}{x'_{C1}}.$$

Полученные отношения определяют тригонометрические функции углов наклона общей нормали профилей ролика и кулачка к координатным осям системы координат I , т. е. кулачка. В частности угол наклона общей нормали к оси координат $Y1$ или, аналогично, угол наклона общей касательной к оси координат $X1$. Обозначим этот вспомогательный угол α^*

На основании расчетной схемы (см. рисунок) составим уравнение для угла давления в кулачковом механизме:

$$\alpha = \alpha^* + \varphi,$$

или

$$\tan \alpha = \tan(\alpha^* + \varphi) = \frac{\tan \alpha^* + \tan \varphi}{1 - \tan \alpha^* \tan \varphi};$$

но с учетом уравнений (6)

$$\tan \alpha^* = \frac{y'_{C1}}{x'_{C1}} = \frac{e - S' + (S_0 + S) \tan \varphi}{(e - S') \tan \varphi - (S_0 + S)}.$$

Подставим выражение для $\tan(\alpha^*)$ в выражение для $\tan(\alpha)$. После преобразований получим известную зависимость, но выведенную в рамках логики единого подхода к математической модели кулачкового механизма:

$$\tan \alpha = \frac{S' - e}{\sqrt{R^2 - e^2} + S}. \quad (7)$$

Напомним, что радиус основной окружности кулачка R выражается формулой

$$R = \sqrt{\left(\frac{S' - e - S \tan \alpha}{\tan \alpha}\right)^2 + e^2}. \quad (8)$$

Очевидно, что в выражении (8) R является функцией угла φ – угла положения кулачка. Определим выражение для вычисления экстремальных значений функции $R = R(\varphi)$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{-2}{\sqrt{\left(\frac{S' - e - S}{\tan \alpha}\right)^2}} \left(\frac{S' - e - S}{\tan \alpha} - S\right) \left(\frac{S''}{\tan \alpha} - S'\right) = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\left(\frac{S' - e - S}{\tan \alpha} - S\right) \left(\frac{S''}{\tan \alpha} - S'\right) = 0. \quad (10)$$

Решая уравнение (10) относительно φ , определим значение угла поворота кулачка, при котором значение радиуса основной окружности кулачка R должно быть максимальным. Затем подставим найденное значение φ в уравнение (8) и определим значение радиуса основной окружности, обеспечивающее в любом положении механизма величину угла давления, не превышающую допустимый показатель.

Таким образом, построение профиля кулачка и определение основных размеров кулачкового механизма выполняются в рамках единого подхода.

Выводы

В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

Разработанная методика синтеза кулачковых механизмов основана на применении геометрического уравнения инвариантности геометрического параметра толкателя, например, радиуса ролика; уравнение огибающей семейства положений роликов получено из этого уравнения.

Особенность методики заключается в применении единых преобразований координат для решения системы уравнений, описывающих теоретический и рабочие профили кулачка. Это обеспечивает простоту и однозначность вычислений.

Корректность методики проверена путем тестирования соответствующего программного обеспечения в пакете Math Cad.

Универсальность базовых положений предлагаемого подхода позволяет применить разра-

ботанную методику для синтеза любых видов плоских кулачковых механизмов.

Библиографические ссылки

1. Babichev D.T., Lagutin S.A., Barmina N.A. Development of the Classical Theory of Gearing and Establishment of the Theory of Real Gearing in 1976-2000. New approaches to gear design and production. Springer International Publishing AG Switzerland, 2020, vol. 81, pp. 1-46.

2. Babichev D.T., Barmina N.A. Computer-Aided Design of Gears and Machine-Tool Meshing with Application of New Concepts, Images and Indices, New approaches to gear design and production. Springer Intern 2020, vol. 81, pp. 157-186.

3. Бабичев Д. Т., Лагутин С. А., Бармина Н. А. Обзор работ русской школы теории и геометрии зацеплений. Ч. 2. Развитие классической теории зацеплений и становление теории реальных зацеплений в 1976–2000 годы // Теория механизмов и машин. 2017. Т. 15, № 3 (35). С. 86–130.

4. Lagutin Sergey, Barmina Natalya, Prof. Litvin F.L. Contribution to the formation of the Russian school of the theory of gearing. Theory and Practice of Gearing and Transmissions, Springer, vol. 34, pp. 19-36. ISBN 978-3-319-19740-1.

5. Бабичев Д. Т., Лагутин С. А., Бармина Н. А. Обзор работ русской школы теории и геометрии зацеплений. Ч. 1. Истоки теории зацеплений и период ее расцвета в 1935–1975 годы // Теория механизмов и машин. 2016. Т.14, № 3 (31). С. 101–134.

6. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М. : Физматгиз, 1960. 444 с.

7. Goldfarb V., Barmina N. (eds.). Theory and Practice of Gearing and Transmissions. Springer International Publishing AG Switzerland, 2016, vol. 34, 450 p. ISBN: 978-3-319-19740-1.

8. Goldfarb V., Trubachev E., Barmina N. (eds.). Advanced Gear Engineering. Springer International Publishing AG Switzerland, 2018, vol. 51, 497 p. ISBN: 978-3-319-60399-5.

9. Goldfarb V., Trubachev E., Barmina N. (eds.). New approaches to gear design and production. Springer International Publishing AG Switzerland, 2020, vol. 81, 529 p.

10. Kozkurt H.A. Analysis of Graphical Approach for Cam Profile Determination. Journal of new results in science (JNRS), 2017, Is. 1, pp. 32-46. ISSN: 1304-7981.

11. Yixin Shao, Zhongxia Xiang, Haitao Liu, Lili Li. Conceptual design and dimensional synthesis of cam-linkage chains for gait rehabilitation. Mechanism and Machine Theory, 2016, vol. 104, pp. 31-42.

12. Yin H., Yu H., Peng J., Shao H. Mathematical Model of Cam Profile Based on Heald Frame Motion Characteristics. Mathematical Problems in Engineering, 2020, vol. 1, ID 2106373, 9 p. doi.org/10.1155/2020/2106373.

13. Ketan T., Taranjeetsingh S., Saurin S., Tejas P. Dynamic Analysis of High Speed Cam Follower System using MATLAB. International Journal of Current Engineering and Technology, 2016, vol. 6, pp. 407-412.

14. Zribi S., Mejerbi M., Tlijani H., Knani J. Comparison between motions profiles applied to flexible manipulator arm. *Proceedings of Engineering and Technology*, 2016, pp. 565-571.

15. Kosenok B., Balyakin V., Krylov E. Dimensional synthesis of a cam profile using the method of closed vector contours in the Theory of Machine and Mechanism study course. *Mechanisms and Machine Science*, 2019, vol. 73, pp. 753-763.

16. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел : пер. с англ. М. : Мир, 1980. 294 с.

References

1. Babichev D.T., Lagutin S.A., Barmina N.A. Development of the Classical Theory of Gearing and Establishment of the Theory of Real Gearing in 1976-2000. *New approaches to gear design and production*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2020, vol. 81, pp. 1-46.

2. Babichev D.T., Barmina N.A. Computer-Aided Design of Gears and Machine-Tool Meshing with Application of New Concepts, Images and Indices, *New approaches to gear design and production*. Springer Intern, 2020, vol. 81, pp. 157-186.

3. Babichev D.T., Lagutin S.A., Barmina N.A. [Development of the classical theory of links and the formation of the theory of real links in 1976-2000]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 86-130 (in Russ.).

4. Lagutin Sergey, Barmina Natalya, Prof. Litvin F.L. Contribution to the formation of the Russian school of the theory of gearing. *Theory and Practice of Gearing and Transmissions*, Springer, vol. 34, pp. 19-36. ISBN: 978-3-319-19740-1.

5. Babichev D.T., Lagutin S.A., Barmina N.A. [The origins of the gearing theory and the period of its heyday in 1935-1975]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*, 2016, vol. 14, no. 3, pp. 101-134 (in Russ.).

6. Litvin F.L. *Teoriya zubchatykh zatsepleni* [Gear theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 444 p. (in Russ.).

7. Goldfarb V., Barmina N. (eds.). *Theory and Practice of Gearing and Transmissions*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2016, vol. 34, 450 p. ISBN: 978-3-319-19740-1.

8. Goldfarb V., Trubachev E., Barmina N. (eds.). *Advanced Gear Engineering*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2018, vol. 51, 497 p. ISBN: 978-3-319-60399-5.

9. Goldfarb V., Trubachev E., Barmina N. (eds.). *New approaches to gear design and production*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2020, vol. 81, 529 p. ISBN: 978-3-030-34944-8.

10. Kozkurt H.A. Analysis of Graphical Approach for Cam Profile Determination. *J. of new results in science (JNRS)*, 2017, no. 1, pp. 32-46. ISSN: 1304-7981.

11. Yixin Shao, Zhongxia Xiang, Haitao Liu, Lili Li. Conceptual design and dimensional synthesis of cam-linkage chains for gait rehabilitation. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, vol. 104, pp. 31-42.

12. Yin H., Yu H., Peng J., Shao H. Mathematical Model of Cam Profile Based on Heald FrameMotion Characteristics. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, vol. 1, ID 2106373, 9 p. doi.org/10.1155/2020/2106373.

13. Ketan T., Taranjeetsingh S., Saurin S., Tejas P. Dynamic Analysis of High Speed Cam Follower System using MATLAB. *International J. of Current Engineering and Technology*, 2016, vol. 6, pp. 407-412.

14. Zribi S., Mejerbi M., Tlijani H., Knani J. Comparison between motions profiles applied to flexible manipulator arm. *Proc. of Engineering and Technology*, 2016, pp. 565-571.

15. Kosenok B., Balyakin V., Krylov E. Dimensional synthesis of a cam profile using the method of closed vector contours in the Theory of Machine and Mechanism study course. *Mechanisms and Machine Science*, 2019, vol. 73, pp. 753-763.

16. Wattenberg J. *Dinamika sistem tverdykh tel* [Dynamics of systems of rigid bodies]. Moscow, Mir Publ., 1980, 294 p. (in Russ.).

Method of the Generalized Approach to the Synthesis of Cam Mechanisms

N.N. Krokhamal, PhD in Engineering, Associate Professor, Kurgan State University, Kurgan, Russia

The method of applying the equation of the geometric connection of links in the highest kinematic pair of the cam mechanism for the complete synthesis of the mechanism is considered. A distinctive feature of the method is that the equation of the geometric connection and the equation of the envelope are written in the Cartesian coordinate system. The envelope equation is derived from the coupling equation. All transformations and solutions of the original coupling equation and the envelope equation are carried out by the matrix method in the Cartesian coordinate system, without switching to other coordinate systems and to graphical methods or their interpretation. It is shown that this approach allows us to immediately obtain the coordinates of the points of the working profiles of the cam and the theoretical profile of the cam on the basis of a single mathematical model. The known calculated dependences of the parameters of cam mechanisms are also obtained on the basis of a single mathematical model, in contrast to the existing methods, which use different mathematical models to solve the problems of synthesis of cam mechanisms. The proposed method simplifies the algorithm for solving the problem and its software implementation. The software created on the basis of the developed methodology was tested. The peculiarity of the technique is the use of uniform standard coordinate transformations to solve a system of equations describing the theoretical and working profiles of the cam. This ensures that the calculations are simple and unambiguous. The correctness of the methodology is verified by testing the corresponding software in the Math Cad package. The universality of the basic provisions of the pro-

posed approach allows us to apply the developed methodology for the synthesis of any type of flat cam mechanisms. The test results suggest that the method is correct and has prospects for development.

Keywords: cam mechanisms, higher kinematic pair, mechanical coupling equation, coordinate transformations, synthesis.

Получено 25.03.2021

Образец цитирования

Крохмаль Н. Н. Методика обобщенного подхода к синтезу кулачковых механизмов // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2021. Т. 24, № 2. С. 15–20. DOI: 10.22213/2413-1172-2021-2-15-20.

For Citation

Krokhmal N.N. [Method of the Generalized Approach to the Synthesis of Cam Mechanisms]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2021, vol. 24, no. 2, pp. 15-20 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2021-2-15-20.