

УДК 681.516.7

DOI: 10.22213/2413-1172-2021-4-17-24

Математическая модель пространственного движения управляемой парашютно-тросовой системы типа «ветролет»

В. М. Чуркин, доктор физико-математических наук, Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Т. Ю. Чуркина, кандидат технических наук, Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. М. Гирин, кандидат технических наук, Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Представлено математическое моделирование пространственного движения управляемой парашютно-тросовой системы типа «ветролет». Рассматриваемая система представляется моделью, составленной из основного парашюта и тормозного парашюта, соединенных тросом. Основным парашютом считается твердым телом, имеющим две плоскости симметрии, а тормозной парашютом – осесимметричным твердым телом. Трос рассматривается как абсолютно гибкая упругая нить, соединенная идеальными шарнирами с основным и тормозным парашютами. Управление основным парашютом осуществляется путем изменения длины управляющих строп, вызывающего деформацию купола и, как следствие, изменение его аэродинамики. При одновременном изменении длины управляющих строп происходит маневрирование основного парашюта в вертикальной плоскости, а при изменении длины управляющих строп с заданной разностью хода – пространственное маневрирование основного парашюта. Составлена система динамических и кинематических уравнений пространственного движения основного парашюта, тормозного парашюта и троса. В случаях, когда основной и тормозной парашюты соединены тросом, массой которого и приложенными к нему силами пренебречь нельзя, его движение представляется уравнениями движения абсолютно гибкой упругой нити в проекциях на оси естественного трехгранника. В результате предлагаемая математическая модель представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, для решения которых могут быть использованы различные численные методы или комплексный численно-аналитический подход. Например, при решении методом характеристик аналитическая часть исследования включает нахождение характеристик и запись соответствующих характеристических уравнений с последующим их численным интегрированием.

Ключевые слова: математическая модель, парашютно-тросовая система, управляемый парашютом, аэродинамика купола, сила натяжения троса.

Введение

Актуальной проблемой сегодня является десантирование полезного груза с точной доставкой в необходимое место земной поверхности и разработка технических решений для этого [1]. Это, например, связано с быстрейшим временем оказания помощи пострадавшим, ликвидацией лесных пожаров в труднодоступных районах, а также с риском потери ценного десантируемого оборудования. Задача регулируемого спуска парашютов различной конфигурации решалась, например, в [2–5]. Еще одна актуальная тема – расчет параметров, необходимых для мягкой посадки спускаемых космических аппаратов (КА) (например, Чуркин В. М., Чуркина Т. Ю. «Математическая модель движения космического аппарата с комбинированной системой мягкой посадки») или вывода на орбиту аппа-

ратов с помощью тросовых систем [6], а также удаление отработавших свой ресурс КА с низких орбит с приземлением в безопасную точку земной поверхности. Одним из технически возможных способов решения такой задачи может быть применение парашютно-тросовой системы (ПТС) типа «ветролет», состоящей из основного парашюта и соединенного с ним тросом тормозного парашюта.

Цель исследования – создание относительно простой математической модели, позволяющей определять траекторию движения ПТС, следовательно, и груза.

Построение математической модели управляемого пространственного движения ПТС типа «ветролет»

Существуют различные подходы моделирования и исследования движения парашютных систем или движения связанных тел [7–9].

Задача о математическом моделировании и исследовании динамики плоского движения ПТС типа ветролет решалась в работе [10], на основании которой построим математическую модель пространственного движения подобной ПТС. Условимся считать основной парашют твердым телом, имеющим две плоскости симметрии, его коуш – идеальным шарниром, трос – абсолютно гибкой невесомой нитью, а тормозной парашют – осесимметричным твердым телом. Допустим, что коуш основного парашюта – центр давления купола – и центр масс лежат на линии пересечения плоскостей его симметрии. Центр давления и центр масс тормозного парашюта лежат в одной точке, расположенной на оси симметрии парашюта, скорость набегающего потока – горизонтальный вектор, модуль которого зависит только от высоты H , а изменения

плотности атмосферы ρ от высоты H пренебрежимо малы. Управление основным парашютом осуществляется путем изменения длины строп управления, вызывающего деформацию купола и, как следствие, изменение его аэродинамики. При одновременном изменении длины строп управления на величину δ происходит маневрирование основного парашюта в вертикальной плоскости, а при изменении длины строп с разностью хода $\delta\Delta$ – пространственное маневрирование основного парашюта.

Для моделирования пространственного движения ПТС (см. рисунок) используются следующие системы координат: абсолютная система $XOYZ$; система $X_1O_1Y_1Z_1$, связанная с основным парашютом; система $X_2O_2Y_2Z_2$, связанная с тросом; система $X_3O_3Y_3Z_3$, связанная с тормозным парашютом.

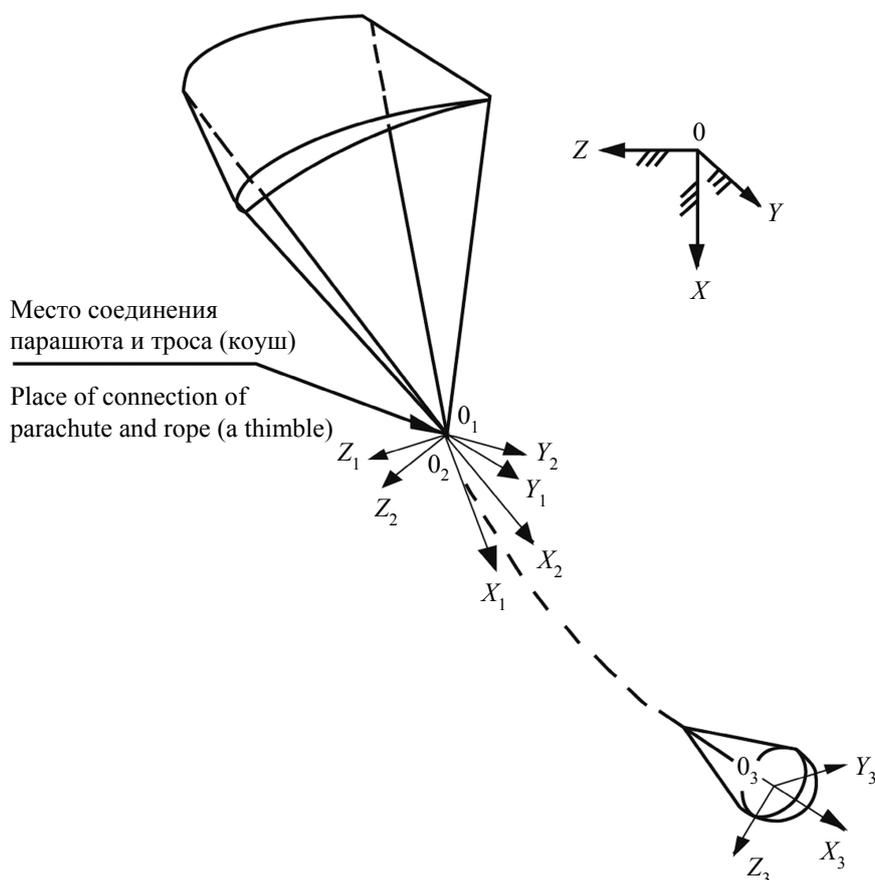


Схема парашютно-тросовой системы типа «ветролет»

Parachute-rope system scheme of the type of a flying machine

Начало системы $X_1O_1Y_1Z_1$ совместим с коушем основного парашюта, а ось O_1X_1 направим вдоль линии пересечения плоскостей симметрии. Начало системы $X_2O_2Y_2Z_2$ также совместим с коушем основного парашюта, а ось O_2X_2 направим вдоль прямой, соединяющей точку O_2

с коушем тормозного парашюта. Начало системы $X_3O_3Y_3Z_3$ расположим в центре масс тормозного парашюта, а ось его симметрии выберем в качестве оси O_3X_3 .

Динамические уравнения ОП в проекциях на оси системы $X_1O_1Y_1Z_1$ запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & (m + \lambda_{11}) \frac{dV_{ox}}{dt} + \lambda_{12} \left(\frac{dV_{oy}}{dt} - V_{ox} \omega_z \right) + \\
 & + \lambda_{16} \frac{d\omega_z}{dt} + (m + \lambda_{33}) V_{oz} \omega_y - (m + \lambda_{22}) \times \\
 & \times V_{oy} \omega_z + (\lambda_{11} - \lambda_{22}) W_o \omega_z \cos \theta_1 + \\
 & + \lambda_{34} \omega_x \omega_y + (\lambda_{35} - ml_c) \omega_y^2 - \\
 & - (\lambda_{26} - ml_c) \omega_z^2 = -0,5\rho S V_D^2 C_x + mg \times \\
 & \times \cos \theta_1 \cos \gamma_1 + R_{ox}; \\
 & (m + \lambda_{22}) \frac{dV_{oy}}{dt} + \lambda_{12} \left(\frac{dV_{ox}}{dt} - V_{oy} \omega_z \right) + \\
 & + (\lambda_{26} + ml_c) \frac{d\omega_z}{dt} + (m + \lambda_{11}) V_{ox} \omega_z - \\
 & - (m + \lambda_{33}) V_{oz} \omega_x + (\lambda_{11} - \lambda_{22}) W_o \omega_z \sin \theta_1 - \\
 & - (\lambda_{35} - ml_c) \omega_x \omega_y - \lambda_{34} \omega_x^2 + \lambda_{16} \omega_z^2 = \\
 & = -0,5\rho S V_D^2 C_y + mg \sin \theta_1 \cos \gamma_1 + R_{oy}; \\
 & (m + \lambda_{33}) \frac{dV_{oz}}{dt} + \lambda_{34} \frac{d\omega_x}{dt} + (\lambda_{35} - ml_c) \times \\
 & \times \frac{d\omega_y}{dt} - (m + \lambda_{11}) V_{ox} \omega_y + (m + \lambda_{22}) V_{oy} \times \\
 & \times \omega_x + (\lambda_{26} + ml_c) \omega_x \omega_z - \\
 & - \lambda_{12} (V_{oy} \omega_y - V_{ox} \omega_x) - \lambda_{16} \omega_y \omega_z = \\
 & = -0,5\rho S V_D^2 C_z + mg \sin \gamma_1 + R_{oz}; \\
 & (J_x + \lambda_{44}) \frac{d\omega_x}{dt} - (J_{xy} - \lambda_{45}) \times \\
 & \times \left(\frac{d\omega_y}{dt} - \omega_x \omega_z \right) - (J_y - J_z + \lambda_{55} - \lambda_{66}) \omega_y \omega_z + \\
 & + \lambda_{16} V_{ox} \omega_y + \lambda_{34} \left(\frac{dV_{oz}}{dt} + V_{oy} \omega_x \right) + \\
 & + (\lambda_{26} + \lambda_{35}) (V_{oy} \omega_y - V_{oz} \omega_z) = 0,5\rho S V_D^2 m_x; \\
 & (J_y + \lambda_{55}) \frac{d\omega_y}{dt} - (J_{yx} - \lambda_{45}) \times \\
 & \times \left(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z \right) + (\lambda_{35} - ml_c) \left(\frac{dV_{oz}}{dt} - V_{ox} \omega_y \right) - \\
 & - (J_z - J_x + \lambda_{66} - \lambda_{44}) \omega_x \omega_z - (\lambda_{16} + \lambda_{34}) \times \\
 & \times (V_{ox} \omega_x - V_{oz} \omega_z) - (\lambda_{26} + ml_c) V_{oy} \omega_x = \\
 & = 0,5\rho S V_D^2 m_y - mgl_c \sin \gamma_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (J_z + \lambda_{66}) \frac{d\omega_z}{dt} + \lambda_{16} \left(\frac{dV_{ox}}{dt} - V_{oy} \omega_z \right) + \\
 & + (\lambda_{26} + ml_c) \left(\frac{dV_{oy}}{dt} + V_{ox} \omega_z \right) - \\
 & - (J_{zx} - \lambda_{35}) (\omega_x^2 - \omega_y^2) - (J_x - J_y + \lambda_{55} - \lambda_{44}) \times \\
 & \times \omega_x \omega_y + (\lambda_{35} - ml_c) V_{oz} \omega_x - \lambda_{34} V_{oz} \omega_y = \\
 & = 0,5\rho S V_D^2 m_z - mgl_c \sin \theta_1 \cos \gamma_1.
 \end{aligned}$$

Здесь V_{ox}, V_{oy}, V_{oz} – проекции вектора скорости коуша основного парашюта; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости вращения основного пара; V_D – скорость центра давления купола ОП относительно набегающего потока,

$$\begin{aligned}
 V_D^2 &= (V_{ox} - W_0 \sin \theta_1 \cos \gamma_1)^2 + \\
 &+ (V_{oy} - W_0 \cos \theta_1 \cos \phi_1 - \omega_z l_D)^2 + \\
 &+ (V_{oz} + W_0 \cos \gamma_1 \cos \phi_1 + \omega_y l_D)^2,
 \end{aligned}$$

где W_0 – скорость ветра на высоте H_0 коуша основного парашюта; m – масса основного парашюта; $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yx}, J_{zx}$ – осевые и центробежные моменты инерции основного парашюта относительно осей связанной системы координат; λ_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) – коэффициенты присоединенных масс купола основного парашюта; R_{0x}, R_{0y}, R_{0z} – проекции вектора силы натяжения троса в коуше основного парашюта,

$$R_{0x} = R_0 (a_{13}^1 a_{13}^2 + a_{23}^1 a_{23}^2 + a_{33}^1 a_{33}^2);$$

$$R_{0y} = R_0 (a_{12}^1 a_{13}^2 + a_{22}^1 a_{23}^2 + a_{32}^1 a_{32}^2);$$

$$R_{0z} = R_0 (a_{11}^1 a_{13}^2 + a_{21}^1 a_{23}^2 + a_{31}^1 a_{33}^2);$$

$$a_{11}^j = \cos \gamma_j \cos \phi_j;$$

$$a_{12}^j = \sin \theta_j \sin \gamma_j \cos \phi_j - \cos \theta_j \sin \phi_j;$$

$$a_{13}^j = \cos \theta_j \sin \gamma_j \cos \phi_j + \sin \theta_j \sin \phi_j;$$

$$a_{21}^j = \cos \gamma_j \sin \phi_j;$$

$$a_{22}^j = \sin \theta_j \sin \gamma_j \sin \phi_j + \cos \theta_j \cos \phi_j;$$

$$a_{23}^j = \cos \theta_j \sin \gamma_j \sin \phi_j - \sin \theta_j \cos \phi_j;$$

$$a_{31}^j = -\sin \gamma_j; \quad a_{32}^j = \sin \theta_j \cos \gamma_j;$$

$$a_{33}^j = \cos \theta_j \cos \gamma_j,$$

где $\theta_j, \gamma_j, \varphi_j$ – углы поворота основного парашюта относительно осей систем $X_1 O_1 Y_1 Z_1$ при $j = 1$) и $X_2 O_2 Y_2 Z_2$ при $j = 2$; $C_x, C_y, C_z, m_x, m_y, m_z$ – коэффициенты аэродинамических сил и моментов купола основного парашюта,

$$\alpha_1 = \arctg \left[\frac{\sqrt{(V_{oy} - W_0 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 - \omega_z l_D)^2 + (V_{oz} + W_0 \cos \gamma_1 \cos \varphi_1 + \omega_y l_D)^2}}{V_{ox} - W_0 \sin \theta_1 \cos \gamma_1} \right];$$

$$\beta_1 = \arctg \left(\frac{V_{oz} + W_0 \cos \gamma_1 \cos \varphi_1 + \omega_y l_D}{V_{oy} - W_0 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 - \omega_z l_D} \right),$$

где l_C, l_D – расстояния от коуша до центра масс и центра давления купола основного парашюта соответственно; S – характерная площадь купола основного парашюта; ρ – плотность воздуха.

При проведении пробных расчетов по моделированию пространственного движения спускаемого объекта с управляемым парашютом для коэффициентов C_x, C_y, C_z использовались зависимости, имеющие следующую структуру:

$$\begin{aligned} C_x &= C_{x0} + C_{x1} \alpha_1 + C_{x2} \alpha_1^2 + C_{x3} \alpha_1^3 + \\ &+ (C_{x01} + C_{x11} \alpha_1 + C_{x21} \alpha_1^2 + C_{x31} \alpha_1^3) \delta + \\ &+ (C_{x02} + C_{x12} \alpha_1 + C_{x22} \alpha_1^2 + C_{x32} \alpha_1^3) \delta^2 + \\ &+ (C_{x03} + C_{x13} \alpha_1 + C_{x23} \alpha_1^2 + C_{x33} \alpha_1^3) \delta^3 + C_{x4} \beta^2; \\ C_y &= C_{y0} + C_{y1} \alpha_1 + C_{y2} \alpha_1^2 + C_{y3} \alpha_1^3 + C_{y4} \alpha_1^4 + \\ &+ (C_{y01} + C_{y11} \alpha_1 + C_{y21} \alpha_1^2 + C_{y31} \alpha_1^3 + C_{y41} \alpha_1^4) \delta + \\ &+ (C_{y02} + C_{y12} \alpha_1 + C_{y22} \alpha_1^2 + C_{y32} \alpha_1^3 + C_{y42} \alpha_1^4) \delta^2 + \\ &+ (C_{y03} + C_{y13} \alpha_1 + C_{y23} \alpha_1^2 + C_{y33} \alpha_1^3 + C_{y43} \alpha_1^4) \delta^3 + \\ &+ (C_{y04} + C_{y14} \alpha_1 + C_{y24} \alpha_1^2 + C_{y34} \alpha_1^3 + C_{y44} \alpha_1^4) \delta^4; \\ C_z &= (C_{z0} + C_{z1} \alpha_1) (\beta_1 + \delta_\Delta). \end{aligned}$$

Для тормозного парашюта динамические уравнения в проекциях на оси системы $X_3 O_3 Y_3 Z_3$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} m_3 \left(\frac{dV_{ox3}}{dt} + V_{oz3} \omega_{z3} - V_{oy3} \omega_{z3} \right) &= \\ = -0,5 \rho S_3 V_{03}^2 \times C_{x3} + m_3 g \cos \theta_3 \cos \gamma_3 + R_{Bx3}; \\ m_3 \left(\frac{dV_{oy3}}{dt} + V_{ox3} \omega_{z3} - V_{oz3} \omega_{x3} \right) &= \\ = -0,5 \rho S_3 V_{03}^2 \times C_{y3} + m_3 g \sin \theta_3 \cos \gamma_3 + R_{By3}; \end{aligned}$$

$$C_x = C_x(\alpha_1, \beta_1, \delta, \delta_\Delta); \quad C_y = C_y(\alpha_1, \beta_1, \delta, \delta_\Delta);$$

$$C_z = C_z(\alpha_1, \beta_1, \delta, \delta_\Delta); \quad m_x = m_x(\alpha_1, \beta_1, \delta, \delta_\Delta);$$

$$m_y = m_y(\alpha_1, \beta_1, \delta, \delta_\Delta); \quad m_z = m_z(\alpha_1, \beta_1, \delta, \delta_\Delta);$$

α_1, β_1 – углы атаки и скольжения купола основного парашюта,

$$\begin{aligned} m_3 \left(\frac{dV_{oz3}}{dt} + V_{oy3} \omega_{x3} - V_{ox3} \omega_{y3} \right) &= \\ = -0,5 \rho S_3^2 \times C_{z3} - m_3 g \sin \gamma_3 + R_{Bz3}; \\ \frac{d\omega_{x3}}{dt} &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$J_3 \left(\frac{d\omega_{y3}}{dt} - \omega_{x3} \omega_{z3} \right) = 0,5 \rho S_3 V_{03}^2 m_{y3} + l_3 R_{Bx3};$$

$$J_3 \left(\frac{d\omega_{z3}}{dt} + \omega_{x3} \omega_{y3} \right) = 0,5 \rho S_3 V_{03}^2 m_{z3} - l_3 R_{By3}.$$

Здесь $V_{ox3}, V_{oy3}, V_{oz3}$ – проекции вектора скорости центра масс ТП; $\omega_{x3}, \omega_{y3}, \omega_{z3}$ – проекции вектора угловой скорости вращения ТП; V_{03} – скорость центра масс ТП относительно набегающего потока,

$$\begin{aligned} V_{03}^2 &= (V_{ox3} - W_3 \sin \theta_3 \cos \gamma_3)^2 + \\ &+ (V_{oy3} - W_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_3)^2 + \\ &+ (V_{oz3} + W_3 \cos \gamma_3 \cos \varphi_3)^2, \end{aligned}$$

где W_3 – скорость ветра на высоте H_3 центра масс ТП; m_3 – масса ТП; J_3 – момент инерции ТП относительно осей $O_3 Y_3$ и $O_3 Z_3$; $R_{Bx3}, R_{By3}, R_{Bz3}$ – проекции вектора силы натяжения троса в коуше ТП,

$$R_{Bx3} = R_B (a_{13}^3 a_{13}^2 + a_{23}^3 a_{23}^2 + a_{33}^3 a_{33}^2);$$

$$R_{By3} = R_B (a_{12}^3 a_{13}^2 + a_{22}^3 a_{23}^2 + a_{32}^3 a_{33}^2);$$

$$R_{Bz3} = R_B (a_{11}^3 a_{13}^2 + a_{21}^3 a_{23}^2 + a_{31}^3 a_{33}^2);$$

$\theta_3, \gamma_3, \varphi_3$ – углы поворота ТП относительно системы; $C_{x3}, C_{y3}, C_{z3}, m_{y3}, m_{z3}$ – коэффициенты аэродинамических сил и моментов ТП,

$$C_{x3} = C_{x3}(\alpha_3); C_{y3} = C_{y3}(\alpha_3); C_{z3} = C_{z3}(\alpha_3);$$

$$m_{y3} = m_{y3}(\alpha_3); m_{z3} = m_{z3}(\alpha_3);$$

α_3 – угол атаки ТП,

$$\alpha_3 = \arctg \left[\frac{\sqrt{(V_{oy3} - W_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_3)^2 + (V_{oz3} + W_3 \cos \gamma_3 \cos \varphi_3)^2}}{V_{ox3} - W_3 \sin \theta_3 \cos \gamma_3} \right];$$

l_3 – расстояние от коуша ТП до его центра масс;
 S_3 – характерная площадь купола ТП.

Динамические уравнения (1) и (2) дополняем следующими кинематическими уравнениями:

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_{yj} \sin \theta_j \operatorname{tg} \gamma_j + \omega_{zj};$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_{yj} \sin \theta_j \sec \gamma_j + \omega_{zj}; \quad (3)$$

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = \omega_{yj} \cos \theta_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$(a_{11}^2 \omega_{y2} - a_{12}^2 \omega_{z2}) l_2 = a_{11}^3 (V_{oz3} - \omega_{y3} l_3) +$$

$$+ a_{12}^3 (V_{oy3} + \omega_{z3} l_3) + a_{13}^3 V_{ox3} - a_{11}^1 V_{oz1} -$$

$$- a_{12}^1 \times V_{oy1} - a_{13}^1 V_{ox1};$$

$$(a_{21}^2 \omega_{y2} - a_{22}^2 \omega_{z2}) l_2 = a_{21}^3 (V_{oz3} - \omega_{y3} l_3) +$$

$$+ a_{22}^3 (V_{oy3} + \omega_{z3} l_3) + a_{23}^3 V_{ox3} - a_{21}^1 V_{oz1} -$$

$$- a_{22}^1 \times V_{oy1} - a_{23}^1 V_{ox1}; \quad (4)$$

$$(a_{31}^2 \omega_{y2} - a_{32}^2 \omega_{z2}) l_2 = a_{31}^3 (V_{oz3} - \omega_{y3} l_3) +$$

$$+ a_{32}^3 (V_{oy3} + \omega_{z3} l_3) + a_{33}^3 V_{ox3} - a_{31}^1 V_{oz1} -$$

$$- a_{32}^1 \times V_{oy1} - a_{33}^1 V_{ox1};$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{ox} a_{33}^1 + V_{oy} a_{32}^1 + V_{oz} a_{31}^1;$$

$$\frac{dy}{dt} = V_{ox} a_{23}^1 + V_{oy} a_{22}^1 + V_{oz} a_{21}^1; \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_{ox} a_{13}^1 + V_{oy} a_{12}^1 + V_{oz} a_{11}^1,$$

где V_{ox}, V_{oy}, V_{oz} ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции на оси системы $X_2 O_2 Y_2 Z_2$ вектора скорости коуша основного парашюта и вектора угловой скорости вращения основного парашюта соответственно; l_2 – расстояние между коушами основного парашюта и тормозного парашюта; x, y, z – координаты коуша основного парашюта в системе $XOYZ$.

В случаях, когда основной и тормозной парашюты соединены длинным тросом, массой которого и приложенными к нему силами пренебречь нельзя, уравнения движения основного и тормозного парашютов дополняются уравнениями движения троса, в качестве которых можно использовать уравнения движения абсолютно гибкой упругой нити, записанные в проекциях на оси естественного трехгранника:

$$m_T \left(\frac{\partial V_\tau}{\partial t} - V_n \omega_b + V_b \omega_n \right) = \frac{\partial T}{\partial \sigma} + R_\tau;$$

$$m_T \left(\frac{\partial V_n}{\partial t} + V_\tau \omega_b - V_b \omega_\tau \right) = T \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + R_n;$$

$$m_T \left(\frac{\partial V_b}{\partial t} + V_n \omega_\tau + V_\tau \omega_n \right) = R_b;$$

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial \sigma} - V_n \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t};$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial \sigma} + V_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - V_b \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \omega_b;$$

$$\frac{\partial V_b}{\partial \sigma} + V_n \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = -\omega_n; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega_\tau}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Omega_\tau}{\partial t} = -\omega_n \Omega_b;$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma} = \omega_\tau \Omega_b - \omega_b \Omega_\tau;$$

$$\frac{\partial \omega_b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Omega_b}{\partial t} = \omega_n \Omega_\tau;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \Omega_\tau;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \Omega_b,$$

где V_τ, V_n, V_b – проекции вектора абсолютной скорости элемента троса; $\omega_\tau, \omega_n, \omega_b$ – проекции вектора абсолютной угловой скорости элемента троса; Ω_τ, Ω_b – проекции вектора Дарбу;

σ – дуговая координата элемента троса; φ, θ – углы кривизны и кручения троса; T – сила натяжения троса; m_T – линейная плотность растянутого троса; f – коэффициент растяжения троса,

$$f = \frac{m_{T0}}{m_T},$$

где m_{T0} – линейная плотность нерастянутого троса; R_τ, R_n, R_b – проекции вектора равнодействующей внешних сил, приложенных к тросу.

Если растяжение троса подчиняется закону Гука, то

$$f = 1 + \alpha T,$$

где α – удельное относительное удлинение троса,

$$\alpha = \frac{1}{E},$$

где E – модуль упругости троса.

Уравнения системы (6) должны решаться при граничных условиях, которыми служат уравнения системы (1) при $\sigma = 0$ ($V = V_0, T = R_0$) и уравнения системы (3) при $\sigma = l$ ($V = V_{03}, T = R_B$), где l – длина троса.

Выводы

1. Построена математическая модель пространственного движения ПТС с учетом уравнений движения троса в виде систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

2. Составленные системы динамических и кинематических уравнений пространственного движения управляемой ПТС позволяют оценивать основные динамические характеристики проектируемых ПТС и рассчитывать их конструктивные параметры.

3. Полученные результаты могут быть использованы для определения параметров мягкой посадки спускаемых космических аппаратов и авиационных парашютных систем, расчета работоспособности элементов конструкции ПТС с учетом динамики нагружения [11].

4. Следует отметить, что наибольшие трудности вызывает исследование движения троса. Решению этой задачи посвящено большое число публикаций как отечественных, так и зарубежных авторов. Причем такая задача возникает при исследовании движения троса в различных средах и не только для ПТС [12–16]. Расчет тросовых систем предлагается к использованию при спуске отработавших ресурс КА и даже в зеленых энергетических системах [17–20], где излагаются различные методы численного ре-

шения уравнений движения троса. Аналитический анализ динамики тросовых систем основан либо на линеаризации уравнений движения троса, либо на их предельном упрощении и замене уравнениями модельных задач математической физики. В ряде работ предлагается использовать комплексный численно-аналитический подход. Наибольшее распространение получил метод характеристик, в котором аналитическая часть исследования включает нахождение характеристик и запись соответствующих характеристических уравнений, а их интегрирование выполняется на ЭВМ.

Библиографические ссылки

1. Józwiak A., Kurzawiński S. The Concept of Using the Joint Precision Airdrop System in the Process of Supply in Combat Actions. *Systemy Logistyczne Wojsk*, 2019, vol. 51, no. 2, pp. 27-42. DOI: 10.37055/sl/w/129219.
2. Fields T., Yakimenko O. Development of a Steerable Single-Actuator Cruciform Parachute. *J. of Aircraft*, 2018, vol. 55, no. 3, pp. 1041-1049. DOI: 10.2514/1.C034416.
3. Fields T., LaCombe J., Wang E. Time-Varying Descent Rate Control Strategy for Circular Parachutes. *J. of Guidance Control and Dynamics*, 2015, vol. 38, no. 8, pp. 1468-1477. DOI: 10.2514/1.G000627.
4. Gao X., Zhang O., Chen Q., Wang W. Fluid-structure Interactions on Steerable Cruciform Parachute Inflation Dynamics. 5th International Conference on Mechanical and Aeronautical Engineering (ICMAE 2019), Series: Materials Science and Engineering, 2019, vol. 751.
5. Fagley C., Seidel J., McLaughlin T., Noetscher G., Rose T. Computational Study of Air Drop Control Mechanisms for Cruciform Parachutes. AIAA 2017-3541, Session: Aerodynamic Decelerator Systems: Aerial Delivery, 2017. DOI: 10.2514/6.2017-3541.
6. Ledkov A. Modeling the spatial motion of a space tether system with an inflatable balloon for raising payload orbit. International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), 2020, pp. 1-5. DOI: 10.1109/ITNT49337.2020.9253250.
7. Negrean I., Kacso K., Schonstein C., Duca A., Rusu F., Cristea F., Haragas S. New Formulations on Motion Equations in Analytical Dynamics. *Applied Mechanics and Materials*, 2016, vol. 823, pp. 49-54. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.823.49.
8. Roithmayr C., Beaty J., Pei J., Richard Barton R., Matz D. Linear Analysis of a Two-Parachute System Undergoing Pendulum Motion. AIAA 2019-3378, Session: Parachute Modeling and Analysis, 2019. Available at: <https://doi.org/10.2514/6.2019-3378>
9. Jing Pei J. Nonlinear Analysis of a Two-Parachute System Undergoing Pendulum Motion. AIAA 2019-3379, Session: Parachute Modeling and Analysis, 2019. Available at: <https://doi.org/10.2514/6.2019-3379>.
10. Чуркин В. М. Устойчивость и колебания парашютных систем. Москва : URSS, 2018. 230 с.

11. Иванов П. И. Расчет аэродинамической нагрузки на планирующий парашют при его разворачивании и перегрузке, действующей на сбрасываемый объект // *Авиационная и ракетно-космическая техника*. 2021. Т. 28, № 2. С. 115–126. DOI: 10.34759/vst-2021-2-115-126.
12. Li G., Shi G., Zhu Z.H. Three-Dimensional High-Fidelity Dynamic Modeling of Tether Transportation System with Multiple Climbers. *JGCD*, 2019, vol. 42, no. 8. DOI: 10.2514/1.G004118.
13. Htun T. Z., Suzuki H., Kuwano A., Tomobe H. Numerical Motion Analysis of ROV coupled with Tether Applying 24-DOFs Absolute Nodal Coordinate Formulation. Proc. of the Twenty-ninth International Ocean and Polar Engineering Conference, 2019, vol. 1, p. 1553. ISBN 978-1 880653 85-2; ISSN 1098-6189.
14. Suzuki H., Tomobe H., Kuwano A., Takasu K., Htun T.Z. Numerical Motion Analysis of ROV applying ANCF to Tether Cable Considering its Mechanical Property. Proc. of the Twenty-eight International Ocean and Polar Engineering Conference, 2018, vol. 1, pp. 365-372. ISBN 978-1-880653-87-6; ISSN 1098-6189.
15. Suzuki H., Yamazoe A., Htun T.Z. Numerical Modeling of Cable-winch System for ROV Launching and Recovering Processes based on the Finite Element Approach. Proc. of the Thirtieth International Ocean and Polar Engineering Conference, 2020, vol. 1, p. 1287. ISBN 978-1-880653-84-5; ISSN 1098-6189.
16. Liu C., Ding L., Gu J. Dynamic Modeling and Motion Stability Analysis of Tethered UAV. 5th International Conference on Robotics and Automation Systems (ICRAS), 2021, pp. 106-110. DOI: 10.1109/ICRAS52289.2021.9476254.
17. Migliore H., McReynolds E. Ocean Cable Dynamics Using on Orthogonal Collocation Solution. *AIAA J.*, 1982, vol. 20, no. 8, pp. 1084-1091.
18. Razoumny Y., Kupreev S., Misra A.K. Method of Tethered System Control for Deorbiting Objects Using Earth's Atmosphere (IAA-AAS-DyCoSS3-152 – AAS 17-923), 2017. Available at: <https://www.univelt.com/linkedfiles/v161%20Contents.pdf>
19. Razoumny Y., Kupreev S., Misra A.K. The Research Method of Controlled Movement Dynamics of Tether System / Conference: First IAA/AAS SciTech Forum on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials. IAA-AAS-SciTech2018-113 – AAS 18-832, 2020, pp. 417-432. Available at: <https://www.univelt.com/linkedfiles/v170%20Contents.pdf>
20. Williams P., Lansdorp B., Ockels W. Optimal Crosswind Towing and Power Generation with Tethered Kites. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, vol. 31, no. 1, pp. 81-93. DOI: 10.2514/1.30089.
21. Józwiak A., Kurzawiński S. The Concept of Using the Joint Precision Airdrop System in the Process of Supply in Combat Actions. *Systemy Logistyczne Wojsk*, 2019, vol. 51, no. 2, pp. 27-42. DOI: 10.37055/slww.129219.
22. Fields T., Yakimenko O. Development of a Steerable Single-Actuator Cruciform Parachute. *J. of Aircraft*, 2018, vol. 55, no. 3, pp. 1041-1049. DOI: 10.2514/1.C034416.
23. Fields T., LaCombe J., Wang E. Time-Varying Descent Rate Control Strategy for Circular Parachutes. *J. of Guidance Control and Dynamics*, 2015, vol. 38, no. 8, pp. 1468-1477. DOI: 10.2514/1.G000627.
24. Gao X., Zhang O., Chen Q., Wang W. Fluid-structure Interactions on Steerable Cruciform Parachute Inflation Dynamics. 5th International Conference on Mechanical and Aeronautical Engineering (ICMAE 2019), Series: Materials Science and Engineering, 2019, vol. 751.
25. Fagley C., Seidel J., McLaughlin T., Noetscher G., Rose T. Computational Study of Air Drop Control Mechanisms for Cruciform Parachutes. AIAA 2017-3541, Session: Aerodynamic Decelerator Systems: Aerial Delivery, 2017. DOI: 10.2514/6.2017-3541.
26. Ledkov A. Modeling the spatial motion of a space tether system with an inflatable balloon for raising payload orbit. International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), 2020, pp. 1-5. DOI: 10.1109/ITNT49337.2020.9253250.
27. Negrean I., Kacso K., Schonstein C., Duca A., Rusu F., Cristea F., Haragas S. New Formulations on Motion Equations in Analytical Dynamics. *Applied Mechanics and Materials*, 2016, vol. 823, pp. 49-54. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.823.49.
28. Roithmayr C., Beatty J., Pei J., Richard Barton R., Matz D. Linear Analysis of a Two-Parachute System Undergoing Pendulum Motion. AIAA 2019-3378, Session: Parachute Modeling and Analysis, 2019. Available at: <https://doi.org/10.2514/6.2019-3378>
29. Jing Pei J. Nonlinear Analysis of a Two-Parachute System Undergoing Pendulum Motion. AIAA 2019-3379, Session: Parachute Modeling and Analysis, 2019. Available at: <https://doi.org/10.2514/6.2019-3379>.
30. Churkin V.M. *Ustoychivost i kolebania parashutnih sistem* [Stability and vibrations parachute systems]. Moscow, URSS Publ., 2018, 230 p. (in Russ.)
31. Ivanov P. [Calculation of the Aerodynamic Load on the Gliding Parachute During Its Deployment and Overload Acting on the Dropped Object], *Vestnik Moskovskogo Aviatzionnogo Instituta = Aerospace MAI Journal*, 2021, vol. 28, no. 2, pp. 115-126. (in Russ.). DOI: 10.34759/vst-2021-2-115-126.
32. Li G., Shi G., Zhu Z.H. Three-Dimensional High-Fidelity Dynamic Modeling of Tether Transportation System with Multiple Climbers. *JGCD*, 2019, vol. 42, no. 8. DOI: 10.2514/1.G004118.
33. Htun T. Z., Suzuki H., Kuwano A., Tomobe H. Numerical Motion Analysis of ROV coupled with Tether Applying 24-DOFs Absolute Nodal Coordinate Formulation. Proc. of the Twenty-ninth International Ocean and Polar Engineering Conference, 2019, vol. 1, p. 1553. ISBN 978-1 880653 85-2; ISSN 1098-6189.
34. Suzuki H., Tomobe H., Kuwano A., Takasu K., Htun T.Z. Numerical Motion Analysis of ROV applying ANCF to Tether Cable Considering its Mechanical Property. Proc. of the Twenty-eight International Ocean and

Polar Engineering Conference, 2018, vol. 1, pp. 365-372. ISBN 978-1-880653-87-6; ISSN 1098-6189.

15. Suzuki H., Yamazoe A., Htun T.Z. Numerical Modeling of Cable-winch System for ROV Launching and Recovering Processes based on the Finite Element Approach. Proc. of the Thirtieth International Ocean and Polar Engineering Conference, 2020, vol. 1, p. 1287. ISBN 978-1-880653-84-5; ISSN 1098-6189.

16. Liu C., Ding L., Gu J. Dynamic Modeling and Motion Stability Analysis of Tethered UAV. 5th International Conference on Robotics and Automation Sciences (ICRAS), 2021, pp. 106-110. DOI: 10.1109/ICRAS52289.2021.9476254.

17. Migliore H., McReynolds E. Ocean Cable Dynamics Using on Orthogonal Collocation Solution. *AIAA J.*, 1982, vol. 20, no. 8, pp. 1084-1091.

18. Razoumny Y., Kupreev S., Misra A.K. Method of Tethered System Control for Deorbiting Objects Using Earth's Atmosphere (IAA-AAS-DyCoSS3-152 – AAS 17-923), 2017. Available at: <https://www.univelt.com/linkedfiles/v161%20Contents.pdf>

19. Razoumny Y., Kupreev S., Misra A.K. The Research Method of Controlled Movement Dynamics of Tether System / Conference: First IAA/AAS SciTech Forum on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials. IAA-AAS-SciTech2018-113 – AAS 18-832, 2020, pp. 417-432. Available at: <https://www.univelt.com/linkedfiles/v170%20Contents.pdf>

20. Williams P., Lansdorp B., Ockels W. Optimal Crosswind Towing and Power Generation with Tethered Kites. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, vol. 31, no. 1, pp. 81-93. DOI: 10.2514/1.30089.

Mathematical Model of Spatial Motion of the Controlled Parachute-Tether System of the Wind Kite Type

V.M. Churkin, DSc (Physics and Mathematics), Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

T.Y. Churkina, PhD in Engineering, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

A. M. Girin, PhD in Engineering, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Mathematical modeling is created for the mathematical task of spatial motion of the controlled parachute-tether system of the "wind kite" type. The mathematical model parachute-tether system consists of a model of the main parachute and a model of the braking parachute. The parachutes are connected by the tether. The model of the main parachute is supposed to be the solid body. This solid body has two planes of symmetry. The braking parachute is the solid body with axial symmetry. The tether model is an absolutely flexible elastic thread. The tether is connected by ideal hinges with the main parachute and braking parachute.

The control of the main parachute is carried out by changing the length of the control slings. Changing the length causes deformation of the dome. This is the reason for the change in its aerodynamics. Maneuvering of the main parachute occurs in the vertical plane, when the length of the control slings changes simultaneously. Maneuvering of the main parachute in space is carried out when the length of the control slings changes, when the slings are given a travel difference.

The system of dynamic and kinematic equations is designed for calculating the controlled spatial movement of the main parachute, braking parachute and tether.

The option exists when the mass of the tether and the forces applied to the tether cannot be neglected. The motion of the tether is represented by the equations of motion of an absolutely flexible elastic thread in projections on the axis of a natural trihedron. The mathematical model is represented by a system of ordinary differential equations and partial differential equations. The problem is solved using various numerical methods. The solution is possible with the help of an integrated numerical and analytical approach as well.

Keywords: mathematical model, parachute-tether system, controlled parachute, dome aerodynamics, sling tension force.

Получено 07.06.2021

Образец цитирования

Чуркин В. М., Чуркина Т. Ю., Гирин А. М. Математическая модель пространственного движения управляемой парашютно-тросовой системы типа «ветролет» // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2021. Т. 24, № 4. С. 17–24. DOI: 10.22213/2413-1172-2021-4-17-24.

For Citation

*Churkin V.M., Churkina T.Y., Girin A.M. [Mathematical Model of Spatial Motion of the Controlled Parachute-Tether System of the Wind Kite Type]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 17-24 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2021-4-17-24.*