

УДК 534.014.1

DOI: 10.22213/2413-1172-2023-3-33-40

## Моделирование и анализ мультимассового осциллятора

**И. П. Попов**, кандидат технических наук, Курганский государственный университет, Курган, Россия

**Н. М. Филькин**, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

**В. В. Харин**, кандидат технических наук, ЗАО «Курганстальмост», Курган, Россия

**А. А. Митюнин**, кандидат технических наук, ООО «Мостпроект», Курган, Россия

*Работа относится к области машиноведения, а именно к осциллирующим механическим системам. Актуальность исследования определяется тем, что колебания инертных масс встречаются повсеместно. В области строительства и использования авиационной и ракетной техники эта тема имеет особенно важное значение. Подобно трехмерной плоской системе координат в координатной плоскости  $Z$  может быть рассмотрена многомерная система с  $n$  осями  $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$ , смещенными друг относительно друга на углы  $2\pi/n$ . Имеется произвольный вектор  $\mathbf{R}$ , исходящий из начала координат  $O$ .  $\mathbf{R} \subset Z$ . Доказывается, что точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , являющиеся координатами конца вектора  $\mathbf{R}$  в координатной системе  $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$ , являются вершинами правильного многоугольника. Форма и размеры многоугольника не связаны с координатами вектора  $\mathbf{R}$ , т.е. неизменны. Центр правильного многоугольника во всех случаях совпадает с серединой вектора  $\mathbf{R}$ . В рассматриваемом (идеализированном) случае многоугольник, в вершинах которого расположены осциллирующие грузы массами  $m$ , лежит в плоскости  $Z$ . В технических приложениях грузы не должны препятствовать перемещениям друг друга, следовательно, каждому грузу должна соответствовать своя плоскость, а все плоскости должны быть параллельными (наподобие многопоршневого механизма). Условием возникновения свободных гармонических колебаний является равенство нулю полной энергии системы, которая в рассматриваемом случае является исключительно кинетической, что и обуславливает монореактивный характер осциллятора. В рассмотренном мультимассовом осцилляторе могут происходить свободные гармонические линейные колебания грузов. При этом в энергообмене участвует только кинетическая энергия. В упругих элементах нет необходимости. Осциллятор не имеет фиксированной собственной частоты колебаний. Частота зависит от начальных скоростей и положений грузов. Правильный многоугольник  $x_1, x_2, \dots, x_n$  совершает двойное вращение – вокруг точки  $O$  и вокруг точки  $r$ . В то же время грузы осуществляют линейные гармонические колебания с амплитудой  $R$ . Использование кривошипно-ползунного или кривошипно-шатунного механизма позволит организовать параллельное движение грузов.*

**Ключевые слова:** многоугольник, осциллирующий груз, свободные колебания, монореактивная система, частота.

### Введение

**И**звестны двухмерные [1–3] и трехмерные [4, 5] плоские монореактивные осцилляторы, в которых могут возникать свободные гармонические колебания [6–8]. Недостатком двухмерных является несбалансированность по силам, что может приводить к вредным побочным вибрационным эффектам. Этого недостатка лишены трехмерные осцилляторы. Вместе с тем представляет интерес возможность увеличения размерности плоских монореактивных осцилляторов, например, при моделировании центрально симметричных многопоршневых механизмов [9–11].

Актуальность исследования определяется тем, что колебания инертных масс встречаются повсеместно [12–14].

### Методы исследования

Используются классические методы теоретической механики [15–17].

Главной методической особенностью настоящей работы является применение плоской системы координат с избыточным числом координатных осей, что позволяет упростить и минимизировать построение математической модели рассматриваемой механической системы.

Прототипом такой системы координат является векторное пространство трехфазной системы в электротехнике [18–20].

### Моделирование мультимассового осциллятора

Подобно системе координат, рассмотренной в [4, 5], в координатной плоскости  $Z$  может быть

рассмотрена система координат с  $n$  осями  $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$ , смещенных друг относительно друга на углы  $2\pi/n$ . Имеется произвольный вектор  $\mathbf{R}$ , исходящий из начала координат  $O$ .  $\mathbf{R} \subset Z$ . В указанных обстоятельствах справедлива

**Теорема 1**

1.1. Точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , являющиеся координатами конца вектора  $\mathbf{R}$  в координатной системе  $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$ , являются вершинами правильного многоугольника.

1.2. Форма и размеры многоугольника не связаны с координатами вектора  $\mathbf{R}$ , т. е. неизменны.

1.3. Центр правильного многоугольника во всех случаях совпадает с серединой вектора  $\mathbf{R}$ .

*Доказательство*

Координаты вектора  $\mathbf{R}$

$$x_1 = R \cos \varphi, \tag{1}$$

$$x_2 = R \cos \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right), \tag{2}$$

$$x_3 = R \cos \left( \frac{2\pi}{n} - \varphi \right), \tag{3}$$

.....

$$x_i = R \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right], \tag{4}$$

.....

$$x_n = R \cos \left[ \frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right]. \tag{5}$$

Из теоремы косинусов следует

$$\begin{aligned} (x_i x_{i+1})^2 &= R^2 \left\{ \cos^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \cos^2 \left( \frac{i\pi}{n} - \varphi \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \cos \left( \frac{i\pi}{n} - \varphi \right) \cos \frac{\pi}{n} \right\} = \\ &= R^2 \left\{ \cos^2 \left( \frac{i\pi}{n} - \varphi - \frac{\pi}{n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[ \cos \frac{\pi}{n} \left( \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{\pi}{n} \left( \sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi - \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) \right] \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left( \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) \cos \frac{\pi}{n} \Big\} = \\ &= R^2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \cos \varphi \cos \frac{\pi}{n} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) = \\ &= R^2 \left[ \cos^2 \varphi \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin^2 \varphi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) = \\
 & = R^2 \left[ \cos^2 \varphi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \left. + \sin^2 \varphi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 & = R^2 \left[ \cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left( \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \left. + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left( \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 & = R^2 \left( \cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) = \\
 & = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.
 \end{aligned}$$

Это означает, что любая сторона многоугольника имеет фиксированную длину, не связанную с координатами вектора  $\mathbf{R}$ .

Пусть  $r$  – это средняя точка вектора  $\mathbf{R}$ . Из теоремы косинусов следует

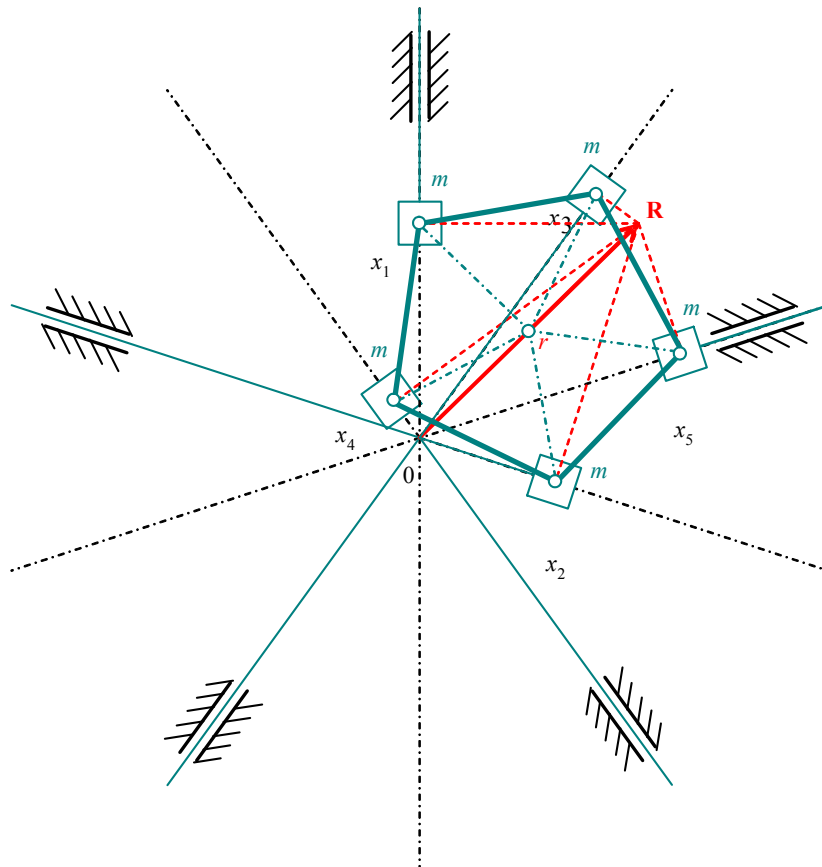
$$\begin{aligned}
 (x_i r)^2 &= R^2 \left\{ \cos^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \frac{1}{4} - \right. \\
 & \left. - 2 \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \right\} = \frac{R^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Это означает, что расстояния от точки  $r$  до всех вершин многоугольника равны между собой. Следовательно, точка  $r$  находится в центре многоугольника, что с учетом равенства его сторон, позволяет заключить, что многоугольник правильный.

Теорема доказана.

Теорема 1 дает исчерпывающее представление об очертаниях мультимассового осциллятора, который схематично изображен на рисунке.

В рассматриваемом (идеализированном) случае многоугольник, в вершинах которого расположены осциллирующие грузы массами  $m$ , лежит в плоскости  $Z$ . В технических приложениях грузы не должны препятствовать перемещениям друг друга, следовательно, каждому грузу должна соответствовать своя плоскость, а все плоскости должны быть параллельными (наподобие многопоршневого механизма).



Мультимассовый осциллятор

Multimass oscillator

**Анализ мультимассового осциллятора**

Далее предполагается отсутствие диссипации энергии и внешних воздействий на осциллятор.

Производные выражений (1)–(5) доставляют скорости грузов.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= R \sin \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= R \sin \left( \frac{2\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_i}{dt} &= R \sin \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= R \sin \left[ \frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является равенство нулю полной энергии системы, которая в рассматриваемом случае является исключительно кинетической, что и обуславливает монореактивный характер осциллятора [3].

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} mR^2 \left\{ \sin^2 \varphi + \sin^2 \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right) + \dots + \right. \\ \left. + \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \dots + \right. \\ \left. + \sin^2 \left[ \frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \right\} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для рассматриваемой плоской многомерной системы координат справедлива

**Теорема 2**

Для  $n \geq 2$  выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}. \quad (7)$$

*Доказательство*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \\ = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \\ \mp \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Сумма единичных векторов, отложенных на координатных осях  $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$ , равна нулю в силу центральной симметрии. Из этого необходимо следует, что и сумма проекций указанных векторов на каждую из осей  $0x_{z1}, 0x_{z2}, \dots, 0x_{zn}$  тоже равна нулю. В этой связи второе и третье слагаемые последнего выражения имеют нулевые значения.

Теорема доказана.

*Следствие*

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] &= \frac{n}{2} = \\ &= \sin^2 \varphi + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \\ &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

Другими словами, последнее тождество является частным случаем формулы (7).

Очевидно, что справедлива и

**Теорема 3**

Для  $n \geq 2$  выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}.$$

Применение теоремы 2 к энергии (6) дает

$$T = \frac{1}{4} nmR^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Это означает, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{const},$$

$$\varphi = C_1 t + C_2.$$

В общем виде начальные условия имеют вид:

$$\varphi(0) = \varphi_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Поэтому

$$C_2 = \varphi_0, \quad C_1 = \omega_0.$$

С учетом этого перемещения грузов (1)–(5) приобретают форму

$$\begin{aligned}
 x_1 &= R \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\
 x_2 &= R \cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right), \\
 x_3 &= R \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right), \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_i &= R \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right], \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= R \cos\left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0\right].
 \end{aligned}$$

В общем виде начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= x_{10}, \\
 \frac{dx_1}{dt}(0) &= v_{10}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi_0 &= \frac{x_{10}}{R}, \\
 \varphi_0 &= \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}, \\
 -R\omega_0 \sin(\omega_0 0 + \varphi_0) &= v_{10}, \\
 \omega_0 &= -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

**Выводы**

В рассмотренном мультимассовом осцилляторе могут происходить *свободные* гармонические линейные колебания грузов. При этом в энергообмене участвует только кинетическая энергия. В упругих элементах нет необходимости.

Осциллятор не имеет фиксированной собственной частоты колебаний. В соответствии с (9) частота зависит от начальных скоростей и положений грузов.

Правильный многоугольник  $x_1, x_2, \dots, x_n$  совершает двойное вращение – вокруг точки 0 и вокруг точки  $r$ .

В то же время грузы осуществляют *линейные гармонические колебания* с амплитудой  $R$ .

Полученные результаты отличаются от описанных в [2] повышением строгости и достоверности определения фазы свободных гармо-

нических колебаний грузов за счет составления и решения соответствующего дифференциального уравнения (8), а также существенным развитием представления о пространственной конфигурации осциллирующей системы за счет представления соответствующего графического материала. Отличие от работы [5] состоит в теоретическом обосновании возможности построения осциллирующей системы с произвольным числом колеблющихся грузов, что значительно расширяет область возможных технических приложений.

Использование кривошипно-ползунного или кривошипно-шатунного механизма позволит организовать параллельное движение грузов.

**Библиографические ссылки**

1. Павлов В. Д. Математическая модель осциллятора произвольной частоты // Вестник машиностроения. 2023. Т. 102, № 4. С. 310–312. DOI: 10.36652/0042-4633-2023-102-4-310-312
2. Попов И. П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1(21). С. 95–103.
3. Попов И. П. Монореактивный гармонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-01
4. Попов И. П. Трехмассовый осциллятор // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2023. № 6. С. 276–279. DOI: 10.36652/0202-3350-2023-24-6-276-279
5. Схема осуществления свободных колебаний трехгрузов без упругих связей / И. П. Попов, В. М. Самуйлов, Т. А. Каргапольцева, В. В. Харин // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2023. № 19. С. 18–22. DOI: 10.26160/2658-3305-2023-19-18-22
6. Казинский А. А., Бабакаев Д. В. Влияние материала концентратора ультразвуковых колебаний на величину амплитуды механических колебаний // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2022. № 4 (64). С. 17–24. DOI: 10.21685/2072-3059-2022-4-2
7. Паймушин В. Н., Макаров М. В., Чумакова С. Ф. Вынужденные и параметрические колебания композитной пластины, вызываемые ее резонансными изгибными колебаниями // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. № 10. С. 86–94. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-10-86-94
8. Лекомцев С. В., Матвеев В. П., Сенин А. Н. Собственные колебания и гидроупругая устойчивость пластины с пьезоэлементом, подключенным к внешней RL-цепи // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 3. С. 97–113. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.09

9. Анализ кинематической схемы поршневого w-образного двигателя с прицепными шатунами / А. П. Маслов, Ю. В. Рождественский, Е. А. Задорожная, М. В. Левцов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2023. Т. 23, № 2. С. 17–30. DOI: 10.14529/engin230202

10. Абызов О. В., Галышев Ю. В., Иванов А. К. Экспериментальное исследование двухфазного теплообмена в модели канала охлаждения головки цилиндра поршневого двигателя // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2020. № 4 (133). С. 4–15. DOI: 10.18698/0236-3941-2020-4-4-15

11. Соловьева В. В. Оптимизация передаточной функции поршневого компрессора по технологическим критериям // Политехнический молодежный журнал. 2019. № 4 (33). С. 8. DOI: 10.18698/2541-8009-2019-4-468

12. Манохина А. А., Попков С. В., Самойлов А. О. Влияние гироскопического эффекта на значения частот свободных колебаний амортизированного оборудования // Труды Крыловского государственного научного центра. 2020. № 2 (392). С. 123–130. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-2-392-123-130

13. Азаров А. А., Гуськов А. М., Пановко Г. Я. Динамика гибкого ротора с диском при точечном контакте с дискретными вязкоупругими ограничителями колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2023. № 1. С. 26–37. DOI: 10.31857/S0235711923010029

14. Свалов А. М. Влияние компактного включения на собственные частоты колебаний колонны труб в скважине // Научные труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2021. № 1. С. 73–77. DOI: 10.5510/OGP20210100482

15. Назарова О. Н. Анализ некоторых задач курса теоретической механики, решаемых методами начертательной геометрии // Геометрия и графика. 2019. Т. 7, № 4. С. 76–83. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-76-83

16. Ахтямов А. В. Применение методов теоретической механики для расчета механизма прессования // Современные проблемы теории машин. 2019. № 7. С. 49–52. DOI: 10.26160/2307-342X-2019-7-49-52

17. Павлов В. Д. Решение задачи трогания многозвенного транспортного средства методами теоретической механики // Вестник Новороссийского филиала Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Серия: механика и математика. 2022. Т. 2, № 4 (8). С. 4–14. DOI: 10.51639/2713-0657\_2022\_2\_4\_4

18. Коровин А. В., Александров И. В. Координатные преобразования трехфазных переменных с использованием кватернионов // Вестник Чувашского университета. 2022. № 1. С. 65–72. DOI: 10.47026/1810-1909-2022-1-65-72

19. Раков И. В. Генетический алгоритм в задаче оценивания параметров асинхронного двигателя с короткозамкнутой обмоткой ротора на основе ба-

ланса мгновенной полной потребляемой мощности // Актуальные вопросы энергетики. 2023. Т. 5, № 1. С. 45–52. DOI: 10.25206/2686-6935-2023-5-1-45-52

20. Махсудов М. Т. Расширение возможностей обеспечения системы управления и защиты асинхронных двигателей электрическим сигналом // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9, № 6. С. 492–497. DOI: 10.33619/2414-2948/91/59

## References

1. Pavlov V.D. (2023) [Mathematical model of an arbitrary frequency oscillator]. *Vestnik mashinostroyeniya*, vol. 102, no. 4, pp. 310-312 (in Russ.). DOI: 10.36652/0042-4633-2023-102-4-310-312

2. Popov I.P. (2013) [Oscillatory systems consisting only of inert or only elastic elements, and the occurrence of free harmonic oscillations in them]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 1(21), pp. 95–103 (in Russ.).

3. Popov I.P. (2022) [Monoreactive harmonic oscillator]. *Trudy MAI*, no. 126 (in Russ.). DOI: 10.34759/trd-2022-126-01

4. Popov I.P. (2023) [Three-mass oscillator]. *Sborka v mashinostroyenii, priborostroyenii*, no. 6, pp. 276-279 (in Russ.). DOI: 10.36652/0202-3350-2023-24-6-276-279

5. Popov I.P., Samuilov V.M., Kargapoltseva T.A., Kharin V.V. (2023) [Scheme for the implementation of free oscillations of three-weights without elastic connections]. *Transportnoye, gornoye i stroitel'noye mashinostroyeniye: nauka i proizvodstvo*, no. 19, pp. 18-22 (in Russ.). DOI: 10.26160/2658-3305-2023-19-18-22

6. Kazinsky A.A., Babakaev D.V. (2022) [Influence of the material of the concentrator of ultrasonic vibrations on the magnitude of the amplitude of mechanical vibrations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskiye nauki*, no. 4 (64), pp. 17-24 (in Russ.). DOI: 10.21685/2072-3059-2022-4-2

7. Paimushin V.N., Makarov M.V., Chumakova S.F. (2022) [Forced and parametric vibrations of a composite plate caused by its resonant bending vibrations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, no. 10, pp. 86-94 (in Russ.). DOI: 10.26907/0021-3446-2022-10-86-94

8. Lekomtsev S.V., Matveenkov V.P., Senin A.N. (2023) [Natural vibrations and hydroelastic stability of a plate with a piezoelectric element connected to an external RL-circuit]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, no. 3, pp. 97-113 (in Russ.). DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.09

9. Maslov A.P., Rozhdestvensky Yu.V., Zadorozhnaya E.A., Levtsov M.V. (2023) [Analysis of the kinematic scheme of a piston w-shaped engine with trailer connecting rods]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Mashinostroyeniye*, vol. 23, no. 2, pp. 17-30 (in Russ.). DOI: 10.14529/engin230202

10. Abyzov O.V., Galyshev Yu.V., Ivanov A.K. (2020) [Experimental study of two-phase heat transfer in the model of the cooling channel of the cylinder head of a piston engine]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstven-*

nogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. *Seriya Mashinostroyeniye*, no. 4 (133), pp. 4-15 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2020-4-4-15

11. Solovieva V.V. (2019) [Optimization of the transfer function of a reciprocating compressor according to technological criteria]. *Politekhnicheskii molodezhnyy zhurnal*, no. 4 (33), pp. 8 (in Russ.). DOI: 10.18698/2541-8009-2019-4-468

12. Manokhina A.A., Popkov S.V., Samoilov A.O. (2020) [Influence of the gyroscopic effect on the values of the frequencies of free vibrations of shock-absorbing equipment]. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra*, no. 2 (392), pp. 123-130 (in Russ.). DOI: 10.24937/2542-2324-2020-2-392-123-130

13. Azarov A.A., Guskov A.M., Panovko G.Ya. (2023) [Dynamics of a Flexible Rotor with a Disk in Point Contact with Discrete Viscoelastic Oscillation Limiters]. *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, no. 1, pp. 26-37 (in Russ.). DOI: 10.31857/S0235711923010029

14. Svalov A.M. (2021) [Influence of compact inclusion on natural vibration frequencies of a pipe string in a well]. *Nauchnyye trudy NIPi Neftegaz GNKAR*, no. 1, pp. 73-77 (in Russ.). DOI: 10.5510/OGP20210100482

15. Nazarova O.N. (2019) [Analysis of some problems of the course of theoretical mechanics, solved by methods of descriptive geometry]. *Geometriya i grafika*, vol. 7, no. 4, pp. 76-83 (in Russ.). DOI: 10.12737/2308-4898-2020-76-83

16. Akhtyamov A.V. (2019) [Application of theoretical mechanics methods for calculating the pressing mechanism]. *Sovremennyye problemy teorii mashin*, no. 7, pp. 49-52 (in Russ.). DOI: 10.26160/2307-342X-2019-7-49-52

17. Pavlov V.D. (2022) [Solving the problem of starting a multi-link vehicle by methods of theoretical mechanics]. *Vestnik Novorossiyskogo filiala Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V. G. Shukhova. Seriya: mekhanika i matematika*, vol. 2, no. 4 (8), pp. 4-14 (in Russ.). DOI: 10.51639/2713-0657\_2022\_2\_4\_4

18. Korovin A.V., Alexandrov I.V. (2022) [Coordinate transformations of three-phase variables using quaternions]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, no. 1, pp. 65-72 (in Russ.). DOI: 10.47026/1810-1909-2022-1-65-72

19. Rakov I.V. (2023) [Genetic algorithm in the problem of estimating the parameters of an asynchronous motor with a squirrel-cage rotor winding based on the balance of the instantaneous total power consumption]. *Aktual'nyye voprosy energetiki*, vol. 5, no. 1, pp. 45-52 (in Russ.). DOI: 10.25206/2686-6935-2023-5-1-45-52

20. Makhsudov M.T. (2023) [Expanding the possibilities of providing the control system and protection of asynchronous motors with an electric signal]. *Byulleten' nauki i praktiki*, vol. 9, no. 6, pp. 492-497 (in Russ.). DOI: 10.33619/2414-2948/91/59

## Modeling and Analysis of a Multidimensional Planar Monoreactive Oscillator

I.P. Popov, PhD in Engineering, Kurgan State University, Kurgan, Russia

N.M. Filkin, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

V.V. Kharin, PhD in Engineering, CJSC "Kurganstal-most", Kurgan, Russia

A.A. Mityunin, PhD in Engineering, LLC "Mostproekt" Kurgan, Russia

*The work belongs to the field of mechanical engineering, namely: to oscillating mechanical systems. The relevance of the study is determined by the fact that fluctuations of inertial masses are found everywhere. In the field of construction and use of aviation and rocket technology, this topic is of particular importance. Like a three-dimensional plane coordinate system in the coordinate plane  $Z$ , a multidimensional system with  $n$  axes  $0x_{z_1}, 0x_{z_2}, \dots, 0x_{z_n}$  shifted relative to each other by angles  $2\pi/n$  can be considered. There is an arbitrary vector  $\mathbf{R}$  emanating from the origin  $0$ .  $\mathbf{R} \subset Z$ . It is proved that the points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , which are the coordinates of the end of the vector  $\mathbf{R}$  in the coordinate system  $0x_{z_1}, 0x_{z_2}, \dots, 0x_{z_n}$ , are the vertices of a regular polygon. The shape and dimensions of the polygon are not related to the coordinates of the vector  $\mathbf{R}$ , i.e. are unchanged. The center of a regular polygon in all cases coincides with the middle of the vector  $\mathbf{R}$ . In the considered (idealized) case, the polygon, at the vertices of which there are oscillating weights of masses  $m$ , lies in the  $Z$  plane. multi-piston mechanism). In the considered multidimensional plane monoreactive oscillator, free harmonic linear oscillations of loads can occur. In this case, only kinetic energy is involved in the energy exchange. There is no need for elastic elements. The oscillator does not have a fixed natural oscillation frequency. The frequency depends on the initial speeds and positions of the weights. A regular polygon  $x_1, x_2, \dots, x_n$  makes a double rotation - around the point  $0$  and around the point  $r$ . At the same time, the loads carry out linear harmonic oscillations with amplitude  $R$ . The use of a crank-slider or crank-and-rod mechanism will allow organizing the parallel movement of goods.*

**Keywords:** polygon, oscillating weight, free oscillations, monoreactive system, frequency.

Получено 04.09.2023

**Образец цитирования**

Моделирование и анализ мультимассового осциллятора / И. П. Попов, Н. М. Филькин, В. В. Харин, А. А. Митюнин // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2023. Т. 26, № 3. С. 33–40. DOI: 10.22213/2413-1172-2023-3-33-40.

**For Citation**

Popov I.P., Filkin N.M., Kharin V.V., Mityunin A.A. (2023) [Modeling and Analysis of a Multidimensional Planar Monoreactive Oscillator]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2023, vol. 26, no. 3, pp. 33-40 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2023-3-33-40.