

УДК 519.8:681.5.037.26(045)

DOI: 10.22213/2413-1172-2023-3-96-106

Анализ характеристики параметров хаотической системы Чуа дробного порядка

И. В. Князев, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

П. А. Ушаков, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Рассмотрена задача анализа параметров хаотической системы дробного порядка. В качестве примера выбрана хаотическая система на основе цепи Чуа целого порядка. Для получения цепи Чуа дробного порядка предложено заменить емкостные элементы в исходной цепи на элементы с фрактальным импедансом. Целью работы является создание математической модели цепи Чуа дробного порядка с реальными значениями элементов цепи, на основе которой оценить существующие программные продукты в среде Matlab, подходящие для моделирования хаотических систем дробного порядка, а также поиск программных продуктов, подходящих для вычисления спектра показателей Ляпунова.

Анализ готовых программных продуктов в среде Matlab из известной литературы показал, что для решения системы дифференциальных уравнений дробного порядка наиболее подходящим вариантом является программа `fde_pi12_rc`. Выбранная программа позволяет задавать все интересующие параметры системы и обладает относительно высокой точностью благодаря использованию алгоритма предиктор – корректор.

На основе этой программы построена область определения дробных показателей системы Чуа, в которой визуально наблюдается наличие характерного аттрактора. Проанализированы существующие программные продукты в среде Matlab, позволяющие вычислять показатели Ляпунова для хаотических систем описанными дифференциальными уравнениями дробного порядка. Из рассмотренных решений лучшей на наш взгляд является программа `FO_NC_Lyapunov`. С помощью выбранной программы построен пространственный график спектра показателей Ляпунова при изменении дробных показателей системы Чуа. На основе пространственного графика спектра показателей Ляпунова и критериев хаотичности системы по значениям показателей Ляпунова была построена область определения с визуализацией зон хаотического поведения системы Чуа.

Области определения, полученные с помощью визуального анализа наличия аттрактора и вычисления спектра показателей Ляпунова для одной и той же математической модели, не совпали, следовательно, в настоящее время отсутствуют программные продукты для достоверной оценки хаотичности систем дробного порядка путем вычисления спектра показателей Ляпунова.

Ключевые слова: цепь Чуа, показатели Ляпунова, Matlab, хаос, дробный порядок, элемент с фрактальным импедансом.

Введение

Термин «хаос» является довольно древним и обычно связан с высокой степенью беспорядка. Последние полвека интенсивных исследований в области нелинейной динамики и теории хаоса [1] показали, что в этом явлении нет ничего случайного. Применительно к электронным схемам с сосредоточенными параметрами хаос можно рассматривать как долговременное непредсказуемое поведение системы, характеризующееся изменением во времени выходных параметров, которые одновременно чрезвычайно чувствительны к начальным условиям и ограничены в конечном объеме пространства состояний [2].

Существуют два необходимых условия для аналоговых динамических систем, при которых может развиваться хаос [3]: три степени свободы (справедливы для автономных систем;

управляемые системы должны быть как минимум второго порядка) и наличие некоторой нелинейности.

Привлекательность динамического хаоса применительно к системам связи определяется его свойствами [4]:

- возможность получения сложных колебаний со сплошным спектром с помощью простых по структуре электронных устройств;
- в одном генераторе хаоса может быть реализовано большое количество различных хаотических режимов;
- управление хаотическими режимами производится путем малых изменений параметров системы;
- хаотические системы обладают в среднем постоянной энтропией на отсчет;
- разнообразие методов модуляции информационного сигнала в хаотический;

- возможность «вложения» большого количества информации в хаотический сигнал;
- увеличение скорости модуляции по отношению к традиционным методам модуляции;
- явление самосинхронизации.

Одним из свойств хаотичности системы является чувствительность к начальным условиям. В качестве количественной меры это понятие обычно рассматривают как показатель Ляпунова (ПЛ) [5]. Для n -мерного фазового пространства существует n показателей Ляпунова, которые в совокупности называются спектром ПЛ.

В работе [6] выдвинута гипотеза, что хаотическая автономная система, описываемая тремя уравнениями, с определенными параметрами нелинейности и управления будет хаотична для любого дробного порядка системы $2 + \epsilon$, где $0 < \epsilon < 1$. Следовательно, хаотическая система может иметь дробный порядок. Однако закономерности поведения хаотических систем дробного порядка и отличие их параметров от параметров хаотических систем целого порядка практически не изучены.

На наш взгляд существуют два основных преимущества использования дробного исчисления в хаотических моделях. Во-первых, увеличивается нелинейность и сложность системы, что делает ее более привлекательной для конфиденциальной передачи данных. Во-вторых, дробный порядок можно рассматривать как дополнительный параметр, который позволяет из-

менять поведение системы без изменения конструкции генератора хаоса.

Целью работы является создание математической модели цепи Чуа дробного порядка с реальными значениями элементов цепи, на основе которой оценить существующие программные продукты в среде Matlab, подходящие для моделирования хаотических систем дробного порядка, а также поиск программных продуктов, подходящих для вычисления спектра показателей Ляпунова.

Цепь Чуа дробного порядка

Цепь Чуа (рис. 1, а) была предложена профессором Калифорнийского университета Леоном Чуа в 1983 г. [7]. После ее открытия она стала на несколько десятилетий парадигмой изучения хаоса. До сих пор эта простая схема исследуется с разных точек зрения и широко используется в образовательных целях. По этой причине было принято решение начать исследование хаотических систем дробного порядка, отталкиваясь именно от схемы Чуа целого порядка.

Классическая схема Чуа состоит из четырех линейных элементов: двух конденсаторов, индуктивности и резистора, а также включает в себя один нелинейный локально активный элемент – диод Чуа. Диод Чуа имеет кусочно-линейную с отрицательным сопротивлением вольтамперную характеристику, которая представлена на рисунке 1, b.

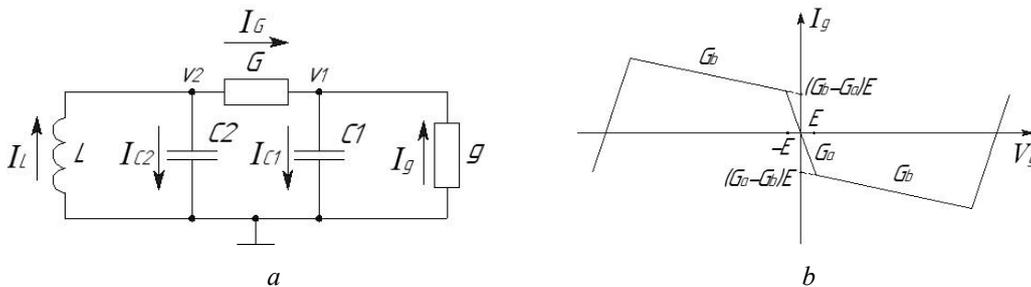


Рис. 1. Цепь Чуа (а); нелинейная характеристика диода Чуа (b)

Fig. 1. Chua circuit (a); non-linear characteristic of the Chua diode (b)

Систему уравнений для цепи Чуа можно получить, используя закон Кирхгофа для токов в узлах схемы и закон Кирхгофа для напряжений в контуре, образованном индуктивностью L и емкостью $C2$ [8]:

$$\begin{cases} -I_{C1} + I_G + I_g = 0, \\ -I_{C2} - I_G + I_L = 0, \\ -U_{C2} - U_L = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_{C1} = I_G + I_g, \\ I_{C2} = -I_G + I_L, \\ U_L = -U_{C2}. \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая компонентные уравнения для емкости и индуктивности [9], получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C1 \frac{dv_1}{dt} = G(v_2 - v_1) - I_g, \\ C2 \frac{dv_2}{dt} = G(v_1 - v_2) + I_L, \\ L \frac{dI_L}{dt} = -v_2. \end{cases} \quad (2)$$

Ток через диод Чуа I_g описывается кусочно-линейной функцией (см. рис. 1, *b*) вида

$$I_g = G_b v_1 + 0,5(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|). \quad (3)$$

Современный вариант схемы Чуа (рис. 2) представляет собой замену индуктивности на гиратор [10] и диода Чуа на два параллельных преобразователя отрицательного сопротивления на основе операционных усилителей [11].

Этот вариант схемы используется для моделирования системы Чуа. В соответствии с этим и основываясь на работе [12], параметры ку-

сочно-линейной функции (см. рис. 1, *b*) G_a , G_b и E можно представить следующими уравнениями:

$$G_a = -\frac{1}{R3} - \frac{1}{R6}; \quad (4)$$

$$G_b = -\frac{1}{R3} + \frac{1}{R7}; \quad (5)$$

$$E = \frac{R6}{R8 + R6} E_{\text{пит}}, \quad (6)$$

где $E_{\text{пит}} = 9 \text{ В}$.

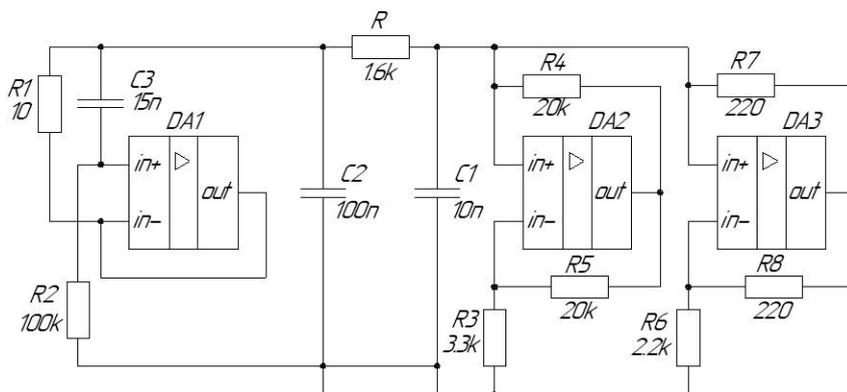


Рис. 2. Вариант схемы системы Чуа

Fig. 2. Chua system circuit variant

Один из вариантов получения дробного порядка цепи Чуа – это замена обычных конденсаторов на фрактальные конденсаторы или, как принято их называть, – элементы с фрактальным импедансом (ЭФИ) [13]. Под ЭФИ в настоящее время понимаются электрические двухполюсные радиоэлементы, импеданс которых имеет постоянный фазовый сдвиг $\varphi_Z = q\pi/2$ ($0 < |q| < 1$) в ограниченном диапазоне частот, а фрактальный импеданс определяется выражением вида

$$Z_F = \frac{1}{\omega^q C_F} e^{-\frac{jq\pi}{2}}, \quad (7)$$

где ω – круговая частота; C_F – константа, имеющая смысл псевдоемкости (фрактальная емкость).

В системе уравнений (2) участвуют два конденсатора, следовательно, их можно заменить на два ЭФИ. Исходя из работы [14] для динамических систем, описываемых дифференциальным уравнением дробного порядка, зависимость между током и напряжением на полюсах ЭФИ можно представить дифференциальным уравнением нецелого порядка q вида

$$I_F = C_F \frac{d^q v_F}{dt^q}, \quad 0 < q < 1. \quad (8)$$

Используя уравнение (8), перепишем систему уравнений (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} v_1}{dt^{q_1}} = \frac{1}{C_{F1}} (G(v_2 - v_1) - I_g), \\ \frac{d^{q_2} v_2}{dt^{q_2}} = \frac{1}{C_{F2}} (G(v_1 - v_2) + I_L), \\ \frac{dI_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_2, \end{cases} \quad (9)$$

где $0 < q_1 < 1$ и $0 < q_2 < 1$ – дробные порядки ЭФИ.

В работе [15] схема Чуа рассмотрена как взаимосвязь между колебательным контуром LC, фильтром нижних частот (ФНЧ) RC и нелинейной нагрузкой в виде диода Чуа. Исходя из этой концепции при замене конденсаторов на ЭФИ можно получить: колебательный LC-контур дробного порядка и ФНЧ дробного порядка.

**Моделирование цепи Чуа
дробного порядка в среде Matlab**

Рассмотрим нормализованную безразмерную систему уравнений схемы Чуа. Для этого произведем замену:

$$m_0 = \frac{G_a}{G}; m_1 = \frac{G_b}{G}; \alpha = \frac{C_{F_2}}{C_{F_1}}; \beta = \frac{C_{F_2}}{LG^2};$$

$$\tau = \frac{tG}{C_{F_2}}; x = \frac{v_1}{E}; y = \frac{v_2}{E}; z = \frac{I_L}{EG}.$$
(10)

В результате замены получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} D_\tau^{q_1} x = \alpha(y - x - h(x)), \\ D_\tau^{q_2} x = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y, \end{cases} \quad (11)$$

где $h(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$;

$0 < q_1 < 1$ и $0 < q_2 < 1$.

Для моделирования системы (11) необходима возможность задания начальных условий и порядка каждого уравнения системы. В литературе можно найти несколько способов решения системы дифференциальных уравнений дробного порядка в среде Matlab, сравнительный анализ которых приведен в таблице 1.

Можно утверждать, что из рассмотренных вариантов для решения системы дифференциальных уравнений дробного порядка наиболее подходящим вариантом является программа fde_pi12_pc, которая позволяет задавать все интересующие параметры системы и обладает относительно высокой точностью благодаря использованию алгоритма предиктор – корректор. Результат решения системы уравнений (11) в программе fde_pi12_pc при $q_1 = q_2 = 1$ представлен на рисунке 3.

Таблица 1. Сравнение существующих программных продуктов для решения хаотических систем дробного порядка в среде Matlab

Table 1. Comparison of existing software products for solving chaotic systems of fractional order in the Matlab program

Наименование программного продукта	Положительные качества	Отрицательные качества
FOMCON Toolbox [16]. Инструмент Fractional integrator	– возможность назначения ширины полосы пропускания; – возможность назначения порядка приближения; – удобная установка и интуитивно понятное использование	отсутствует возможность назначения начальных условий
ninteger [17]. Инструмент Fractional derivative	– возможность назначения ширины полосы пропускания; – возможность назначения пропорционального прироста; – возможность назначения порядка приближения; – широкий выбор способов фильтрации	– отсутствует возможность назначения начальных условий; – отсутствует возможность установки инструмента
fde12 [18]	– быстрый по скорости построения инструмент; – использует алгоритм предиктор-корректор, что увеличивает точность	отсутствует возможность назначения дробного порядка для каждого уравнения системы
fde_pi1_ex [19]	– простой в использовании	низкая точность вычислений
fde_pi1_im [19]	– даже при большом размере шага возвращает надежный результат; – использует алгоритм неявного метода по правилу прямоугольника	необходимо обязательно задавать матрицу Якоби
fde_pi2_im [19]	– даже при большом размере шага возвращает надежный результат; – использует алгоритм неявного метода по правилу трапеции	необходимо обязательно задавать матрицу Якоби
fde_pi12_pc [19]	– использует алгоритм предиктор – корректор, что увеличивает точность; – простой в использовании	–
алгоритмы Грюнвальда – Летникова [20]	имеется возможность поэтапной оценки работы алгоритма	– низкая точность вычислений; – отсутствует единое готовое решение

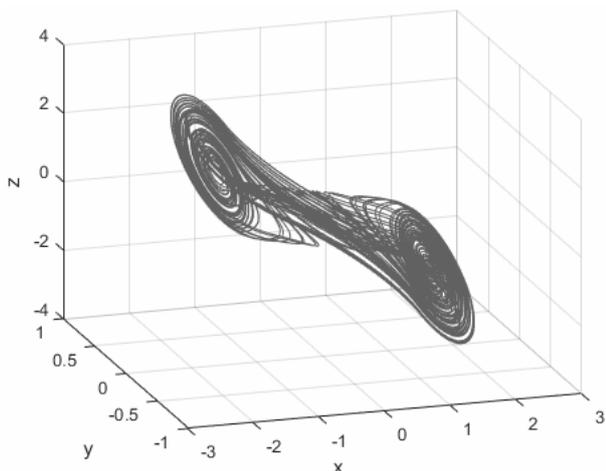


Рис. 3. Аттрактор цепи Чуа

Fig. 3. Chua circuit attractor

Перед началом вычисления спектра ПЛ была решена система уравнений (11) в программе fde_pi12_pc при различных показателях дробного

порядка q_1 и q_2 с шагом 0,01 и визуально оценено наличие или отсутствие аттрактора, представленного на рисунке 3. В результате этого получена область определения дробных показателей системы Чуа (11) q_1 и q_2 , при которых визуально наблюдается хаотическое поведение системы (рис. 4). Закрашенный участок соответствует области, в которой наблюдается характерный вид аттрактора, называемого двойным завитком (англ. double scroll).

В работе [21] показано, что цепь Чуа может проявлять хаотическое поведение для минимального дробного порядка системы равного 2,7 при изменении дробного порядка каждого из трех уравнений цепи Чуа. В нашем случае (см. рис. 4) минимальный порядок системы, при котором наблюдается хаотическое поведение, $0,82 + 0,86 + 1 = 2,68$, следовательно, минимальный порядок достигается даже при изменении двух дробных порядков системы уравнений цепи Чуа.

q2 \ q1	0,8	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	
0,8																						
0,81																						
0,82																						
0,83																						
0,84																						
0,85																						
0,86																						
0,87																						
0,88																						
0,89																						
0,9																						
0,91																						
0,92																						
0,93																						
0,94																						
0,95																						
0,96																						
0,97																						
0,98																						
0,99																						
1																						

Рис. 4. Дробные показатели системы Чуа (11) q_1 и q_2 , при которых визуально наблюдается хаотическое поведение системы

Fig. 4. Fractional exponents of the Chua system (11) q_1 and q_2 at which the chaotic behavior of the system is visually observed

Расчет показателя Ляпунова для цепи Чуа в среде Matlab

Кроме оценки наличия аттрактора для количественной оценки хаотичности системы используется показатель Ляпунова (ПЛ) [22–26], который эффективен как при изучении автономной, так и неавтономной динамики систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. ПЛ характеризует неустойчивость фа-

зовых траекторий, то есть наличие высокой чувствительности движения к вариации начальных условий.

Рассмотрим точку $x(t_0)$ на рисунке 5, которая принадлежит аттрактору в начальный момент времени t_0 .

Выбрав некоторое достаточно малое приращение $\varepsilon(t_0)$, можно получить точку $\tilde{x}(t_0)$ такую,

чтобы $\|\tilde{x}(t_0) - x(t_0)\| = \varepsilon(t_0)$. Запуск вычислений при начальных условиях $x(t_0)$ и $\tilde{x}(t_0)$ на время равное Δt позволяет получить точки $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$. Расстояние между $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ обозначим через $\varepsilon(t)$, которое упрощенно можно считать равным

$$\varepsilon(t) \cong \varepsilon(t_0)e^{\lambda \Delta t}, \quad (12)$$

где λ – параметр, называемый старшим ПЛ.

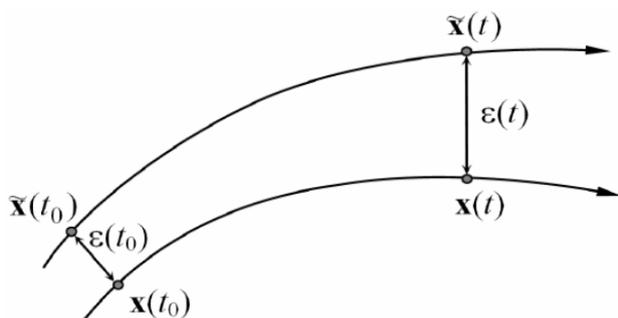


Рис. 5. Определение ПЛ

Fig. 5. Definition of the Lyapunov exponent

После преобразования (12) получим

$$\lambda \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)} \right). \quad (13)$$

Для уточнения результата вычисления старшего ПЛ запуск вычисления системы производится многократно.

Спектр ПЛ вычисляется аналогично старшему ПЛ за исключением того, что строится в n -мерном фазовом пространстве n -мерная сфера с радиусом $\varepsilon(t_0)$, затем вычисляется расстояние до каждой траектории по главным полуосям $(\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t))$ n -мерного эллипсоида ортогональной n -мерной системы координат.

Существует множество алгоритмов для вычисления старшего ПЛ или спектра ПЛ либо из системных уравнений (алгоритм Бенеттина) [27], либо из временных рядов [28, 29]. В настоящее время существует несколько готовых программных продуктов для вычисления старшего ПЛ или спектра ПЛ у хаотических систем дробного порядка в среде Matlab. Сравнительный анализ программных продуктов представлен в таблице 2.

Таблица 2. Оценка готовых программных продуктов для вычисления старшего ПЛ или спектра ПЛ у хаотических систем дробного порядка в среде Matlab

Table 2. Evaluation of existing solutions for calculating the maximum Lyapunov exponent or the spectrum of Lyapunov exponents for chaotic systems of fractional order in the Matlab program

Наименование программного продукта	Описание
FO_NC_Lyapunov [30]	Позволяет вычислить спектр ПЛ для отличающихся друг от друга дробных порядков системы уравнений. В файле FO_NC_Lyapunov используется программа fde_pi12_pc
FO_Lyapunov_p [31]	Используется совместно с файлом run_FO_LE_p для получения эволюции изменения показателей Ляпунова от значения дробного порядка. В файле FO_Lyapunov_p используется программа fde12
Lyarosenstein [32]	Программа использует алгоритм Розенштейна. При попытках автоматизированного вычисления старшего ПЛ выдает ошибки на определенных значениях q_1 и q_2 , что не позволяет получать эволюцию изменения старшего ПЛ от значений дробных порядков хаотической системы уравнений
Алгоритм Вольфа [33]	Алгоритм в течение многих лет распространялся авторами на Fortran и C и только недавно был преобразован в Matlab. Программа не удобная, интуитивно не понятная. Не позволяет получать эволюцию изменения старшего ПЛ от значений дробных порядков хаотической системы уравнений
Алгоритм Бенеттина из работы [34]	Простой и понятный алгоритм, описанный математически. Для систем целого порядка результат соответствует ожидаемому, но не позволяет вычислять спектр ПЛ для систем дробного порядка

Из всех найденных и рассмотренных вариантов лучшим решением для вычисления спектра ПЛ является программа FO_NC_Lyapunov.

Для получения эволюции изменения спектра ПЛ от значений дробных порядков хаотической системы уравнений необходимо изменить программу FO_NC_Lyapunov, написав

надстройку из двух циклов перебора параметров q_1 и q_2 , а также заменив систему уравнений по умолчанию на систему уравнений цепи Чуа. Параметры q_1 и q_2 изменялись от 0,8 до 1 с шагом 0,01, в результате чего был получен график, представленный на рисунке 6.

Для хаотической системы, состоящей из трех уравнений, известно, что она будет хаотична, если один ПЛ будет положительный, второй – отрицательный, а третий – равен нулю [35]. Исходя из этого и результата, полученного на рисунке 6, можно визуальн

оценить границы зоны распределения хаотичности системы Чуа. Результат визуализации представлен на рисунке 7. Окрашенный участок соответствует области, в которой по критерию хаотичности спектра ПЛ должен присутствовать хаос.

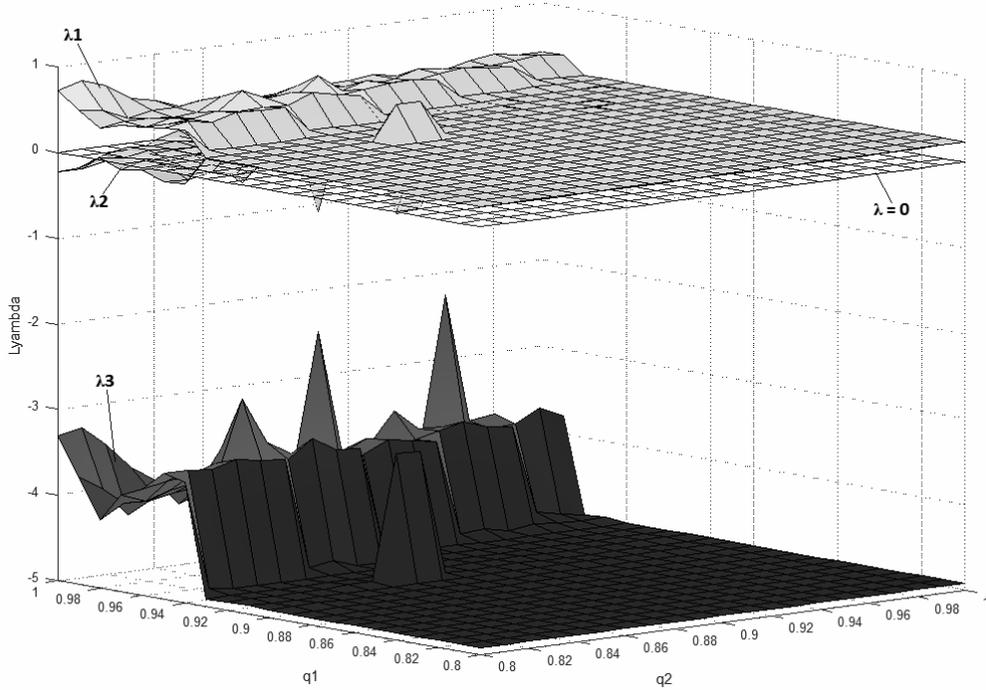


Рис. 6. График изменения спектра ПЛ системы Чуа при изменении порядков q_1 и q_2

Fig. 6. Graph of the change in the spectrum of Lyapunov exponents of the Chua system with a change in the orders q_1 and q_2

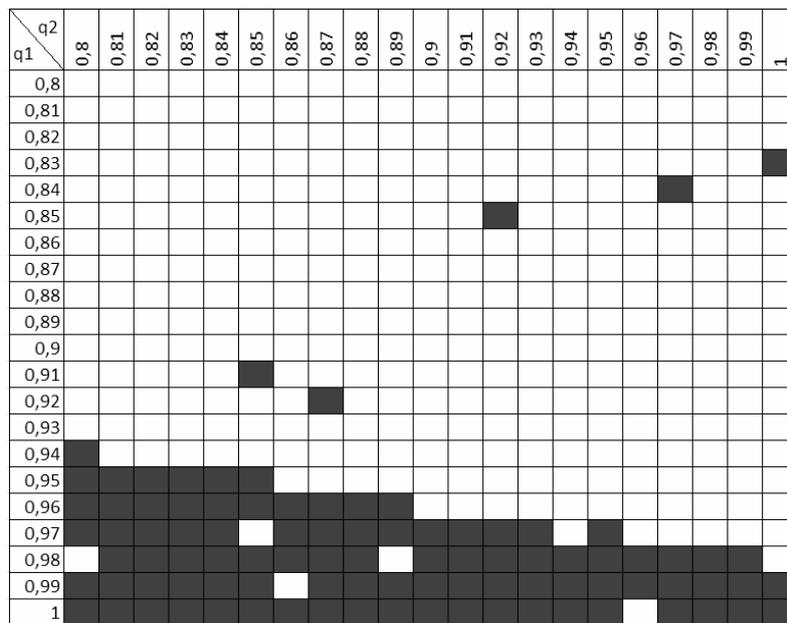


Рис. 7. Дробные показатели системы Чуа (11) q_1 и q_2 , при которых выполняется условие хаотичности по значениям спектра ПЛ

Fig. 7. Fractional exponents of the Chua system (11) q_1 and q_2 at which the condition of chaos is satisfied according to the value of the Lyapunov exponent

При сравнении рисунков 4 и 7 можно заметить существенные отличия областей определения хаотического поведения системы Чуа, следовательно, в настоящее время для оценки систем дробного порядка не существует алгоритма, результаты которого можно было бы сопоставить с визуальным наблюдением, а значит, достоверно оценить спектр ПЛ.

Выводы

Таким образом, проведенный анализ показал, что лучшим программным продуктом в среде Matlab для моделирования хаотических систем дробного порядка является программа `fde_pi12_pc`.

Анализ программных продуктов в Matlab для вычислений спектра ПЛ показал, что в настоящее время отсутствуют готовые инструменты для достоверной оценки хаотичности систем дробного порядка путем вычисления спектра ПЛ.

В дальнейшем в этом направлении работы предстоит синтезировать ЭФИ с необходимыми параметрами q_1 и q_2 , и проверить на PSpice-моделях возможность получения хаотического поведения цепи Чуа. При положительных результатах моделирования необходимо сравнить рисунок 4 с результатами схемотехнического моделирования.

Библиографические ссылки

1. *Petrzela J.* (2022) Chaos in Analog Electronic Circuits: Comprehensive Review, Solved Problems, Open Topics and Small Example. Mathematics, 2022, vol. 10, no. 4108, pp. 1-2. <https://doi.org/10.3390/math10214108>
2. *Datta A., Mukherjee A., Ghosh A.* (2021) Simulation and Analysis of a Chaos-Masking Communication Scheme Based on Electronic Simulator for Electro-Optic Modulator with Noise. SN Computer Science, 2021, vol. 2, no. 4, pp. 1-9. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00622-8>
3. *Kenya T., Mamoru O., Eiji O.* (2023) Demonstration of chaos-based radio encryption modulation scheme through wired transmission experiments. IEICE Transactions on Communications, 2023, pp. 1-8. DOI: 10.1587/transcom.2022EVT0005
4. *Хатунцева О. Н.* О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца // Труды МАИ. 2020. № 112. С. 1. DOI: 10.34759/trd-2020-112-1
5. *Евстифеев Е. В., Москаленко О. И.* Применение метода расчета локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации // Проблемы информатики. 2022. № 2 (55). С. 5–16. DOI: 10.24412/2073-0667-2022-2-5-16
6. *Ahmad W.M., Sprott J.* (2003) Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. Chaos Solitons Fractals, 2003, no. 16, pp. 339-351. DOI: 10.1016/S0960-0779(02)00438-1
7. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* (1986) The Double Scroll Family. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1986, vol. 33, no. 11, pp. 1072-1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869
8. *Мрясов В. Д.* Разработка установки по изучению закона Ома и законов Кирхгофа // Молодежная наука : труды XXVI Всероссийской студенческой научно-практической конференции КРИЖТ ИрГУПС, Красноярск, 2022. С. 106–110.
9. *Червинский Е. Н.* Прямой расчет полосно-пропускающих фильтров // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2022. Т. 25. № 6. С. 6–21. DOI: 10.32603/1993-8985-2022-25-6-6-21
10. *Сергеев И. С., Петров В. М.* Гиратор в источниках вторичного электропитания // Вестник Новгородского государственного университета. 2018. № 4 (110). С. 19–24.
11. *Мамиконян Б. М., Меликян Т. А.* Принципы построения электронных источников тока, управляемых напряжением // Вестник Национального политехнического университета Армении. Информационные технологии, электроника, радиотехника. 2018. № 2. С. 41-55.
12. *Ишмуков Д. А., Афанасьев В. В.* Средства моделирования радиоэлектронной системы передачи информации с хаотической маскировкой псевдослучайными сигналами системы Чуа // Вестник молодой науки России. 2019. № 3. С. 34.
13. *Elwakil A.S.* Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area. IEEE Circuits and Systems Magazine. 2010. Vol. 10. № 4. Pp. 40–50. DOI: 10.1109/MCAS.2010.938637
14. *Francisco G.A., Juan R.G., Manuel G.C., Roberto R.H.* (2014) Fractional RC and LC electrical circuits. Ingenieria Investigacion y Tecnologia, 2014, vol. 15, no. 2, pp. 311-319. DOI: 10.1016/S1405-7743(14)72219-X
15. *Moez F., Ichraf E.G.* (2013) Synchronization of integer order and fractional order Chua's systems using robust observer. Communications Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 625-638. DOI: 10.1109/SSD.2011.5986786
16. *Тепляков А.* FOMCON Toolbox for MATLAB [Электронный ресурс] // MathWorks / The MathWorks, Inc. Швейцария. URL: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/66323-fomcon-toolbox-for-matlab> (дата обращения: 23.01.2023).
17. *Valerio D.* Ninteger [Электронный ресурс]. MathWorks. The MathWorks, Inc. Швейцария. URL: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8312-ninteger> (дата обращения: 02.02.2023).
18. *Garrappa R.* Predictor-corrector PECE method for fractional differential equations [Электронный ресурс]. MathWorks. The MathWorks, Inc. Швейцария. URL: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32918-predictor-corrector-pece-method-for-fractional-differential-equations> (дата обращения: 04.02.2023).

19. *Garrappa R.* (2018) Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 16, pp. 1-23. DOI: 10.3390/math6020016
20. *Trzaska Z.* (2011) Matlab Solutions of Chaotic Fractional Order Circuits. *Engineering Education and Research Using MATLAB*, 2011, pp. 443-464. DOI: 10.5772/23144
21. *Hartley T.T., Lorenzo C.F., Qammer H.K.* (1995) Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1995, vol. 42, no. 8, pp. 485-490. DOI: 10.1109/81.404062
22. *Коструб И. Д.* Матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле в вопросах устойчивости по Ляпунову // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 123. С. 431–436. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436
23. *Садриддинов М. М.* Построение функций Ляпунова для динамической системы дифференциальных уравнений // Политехнический вестник. Серия: Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2021. № 4 (56). С. 9–14.
24. *Romanov S.A., Dushin S.E., Shpakovskaya I.I.* (2022) Construction of the domain of attraction based on Lyapunov functions for general nonlinear systems. *Modern Science and Innovations*, 2022, no. 3, pp. 10-19. DOI: 10.37493/2307-910X.2022.3.1
25. *Efendiev B.I.* (2022) An analogue of the Lyapunov inequality for an ordinary second-order differential equation with a fractional derivative and a variable coefficient. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2022, no. 2, pp. 83-92. DOI: 10.31489/2022M2/83-92
26. *Энеева Л. М.* Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2019. Т. 28, № 3. С. 32–39. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39
27. *Пчелинцев А. Н.* Об исследовании динамической системы четвертого порядка с квадратичными нелинейностями // Математические методы в технологиях и технике. 2021. № 4. С. 11-15. DOI: 10.52348/2712-8873_MMTT_2021_4_11
28. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* (1985) Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 285-317. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9
29. *Rosenstein M.T., Collins J.J.* (1994) Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1994, vol. 73, no. 1-2, pp. 82-98. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90226-7
30. *Marius D.* (2021) Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems, Part II: The non-commensurate case. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, vol. 31, no. 12. DOI: 10.1142/S021812742150187X
31. *Marius D.* FO_Lyapunov_p [Электронный ресурс]. MathWorks. The MathWorks, Inc. Швейцария. URL: https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/114610-fo_lyapunov_p (дата обращения: 11.03.2023).
32. *Mirwais.* Largest Lyapunov Exponent with Rosenstein's Algorithm [Электронный ресурс]. MathWorks. The MathWorks, Inc. Швейцария. URL: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38424-largest-lyapunov-exponent-with-rosenstein-s-algorithm> (дата обращения: 13.03.2023).
33. *Wolf A.* Lyapunov exponent estimation from a time series [Электронный ресурс]. MathWorks. The MathWorks, Inc. Швейцария. URL: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48084-wolf-lyapunov-exponent-estimation-from-a-time-series> (дата обращения: 11.03.2023).
34. *Добряня В. В.* Нейросетевой метод вычисления спектра показателей Ляпунова в анализе нелинейной динамики классических систем // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2023. Т. 25. № 2. С. 30-40. DOI: 10.18127/j19998554-202302-03
35. *Shashikhin V.N., Budnik S.V., Golovina K.O.* (2021) Control of the spectrum of Lyapunov characteristic exponents in nonlinear large-scale systems. *Computing, Telecommunications and Control*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 37-51. DOI: 10.18721/JCSTCS.14404

References

- Petrzela J. (2022) Chaos in Analog Electronic Circuits: Comprehensive Review, Solved Problems, Open Topics and Small Example. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 4108, pp. 1-2. <https://doi.org/10.3390/math10214108>
- Datta A., Mukherjee A., Ghosh A. (2021) Simulation and Analysis of a Chaos-Masking Communication Scheme Based on Electronic Simulator for Electro-Optic Modulator with Noise. *SN Computer Science*, 2021, vol. 2, no. 4, pp. 1-9. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00622-8>
- Kenya T., Mamoru O., Eiji O. (2023) Demonstration of chaos-based radio encryption modulation scheme through wired transmission experiments. *IEICE Transactions on Communications*, 2023, pp. 1-8. DOI: 10.1587/transcom.2022EBT0005
- Khatuntseva O.N. (2020) [On stochastic properties of dynamic chaos in systems of autonomous differential equations, such as the Lorentz system]. *Trudy MAI*, 2020, no. 112, p. 1 (in Russ.). DOI: 10.34759/trd-2020-112-1
- Evstifeev E.V., Moskalenko O.I. (2022) [Application of calculation of local Lyapunov exponents to analyze characteristics of intermittent generalized synchronization]. *Problemy informatiki*, 2022, no. 2, pp. 5-16 (in Russ.) DOI: 10.24412/2073-0667-2022-2-5-16
- Ahmad W.M., Sprott J. (2003) Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos Solitons Fractals*, 2003, no. 16, pp. 339-351. DOI: 10.1016/S0960-0779(02)00438-1
- Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. (1986) The Double Scroll Family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1986, vol. 33, no. 11, pp. 1072-1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869

8. Mryasov V.D. (2022) [Development of an installation for the study of Ohm's law and Kirchhoff's laws]. In the collection: Youth Science. Proceedings of the XXVI All-Russian Student Scientific and Practical Conference KtIRT IrSTU, Krasnoyarsk, 2022, pp. 106-110. (in Russ.).
9. Chervinskiy E.N. (2022) [Direct calculation of band-pass filters]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij Rossii. Radioelektronika*, 2022, vol. 25, no. 6, pp. 6-21 (in Russ.). DOI: 10.32603/1993-8985-2022-25-6-6-21
10. Sergeev I.S., Petrov V.M. (2018) [The gyrator in secondary power supplies]. *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2018, no. 4, pp. 19-24 (in Russ.).
11. Mamikonyan B.M., Melikyan T.A. (2018) [The principles of constructing voltage-controlled electronic current sources]. *Vestnik Nacional'nogo politehnicheskogo universiteta Armenii*, 2018, no. 2, pp. 41-55 (in Russ.).
12. Ishmukov D.A., Afanasiev V.V. (2019) [Simulation tools for radio-electronic information transmission system with chaotic masking by pseudo-random signals of the Chua system]. *Informacionnye tehnologii, jelektronika, radiotekhnika*, 2019, no. 3, pp. 34 (in Russ.).
13. Elwakil A.S. (2010) [Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 40-50. DOI: 10.1109/MCAS.2010.938637
14. Francisco G.A., Juan R.G., Manuel G.C., Roberto R.H. (2014) Fractional RC and LC electrical circuits. *Ingenieria Investigacion y Tecnologia*, 2014, vol. 15, no. 2, pp. 311-319. DOI: 10.1016/S1405-7743(14)72219-X
15. Moez F., Ichraf E.G. (2013) Synchronization of integer order and fractional order Chua's systems using robust observer. *Communications Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 625-638. DOI: 10.1109/SSD.2011.5986786
16. Teplyakov A. [FOMCON Toolbox for MATLAB]. Available at: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/66323-fomcon-toolbox-for-matlab> (accessed: 23.01.2023).
17. Valerio D. [Ninteger]. Available at: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8312-ninteger> (accessed: 02.02.2023).
18. Garrappa R. [Predictor-corrector PECE method for fractional differential equations]. Available at: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32918-predictor-corrector-pece-method-for-fractional-differential-equations> (accessed: 04.02.2023).
19. Garrappa R. (2018) Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 16, pp. 1-23. DOI: 10.3390/math6020016
20. Trzaska Z. (2011) Matlab Solutions of Chaotic Fractional Order Circuits. *Engineering Education and Research Using MATLAB*, 2011, pp. 443-464. DOI: 10.5772/23144
21. Hartley T.T., Lorenzo C.F., Qammer H.K. (1995) Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1995, vol. 42, no. 8, pp. 485-490. DOI: 10.1109/81.404062
22. Kostrub I.D. (2018) [Hurwitz matrix, Lyapunov and Dirichlet on the sustainability of Lyapunov's]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Serija: Estestvennye i tehnicheckie nauki*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 431-436 (in Russ.). DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436
23. Sadriddinov M.M. (2021) [Construction of Lyapunov functions for a dynamic system of differential equations]. *Politehnicheskij vestnik. Serija: Intellekt. Innovacii. Investicii*, 2021, no. 4, pp. 9-14 (in Russ.).
24. Romanov S.A., Dushin S.E., Shpakovskaya I.I. (2022) Construction of the domain of attraction based on Lyapunov functions for general nonlinear systems. *Modern Science and Innovations*, 2022, no. 3, pp. 10-19. DOI: 10.37493/2307-910X.2022.3.1
25. Efendiev B.I. (2022) An analogue of the Lyapunov inequality for an ordinary second-order differential equation with a fractional derivative and a variable coefficient. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2022, no. 2, pp. 83-92. DOI: 10.31489/2022M2/83-92
26. Eneeva L.M. (2019) [Lyapunov inequality for an equation with fractional derivatives with different origins]. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2019, vol. 28, no. 3, pp. 32-39 (in Russ.). DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39
27. Pchelintsev A.N. (2021) [On the study of fourth-order dynamic system with quadratic nonlinearities]. *Matematicheskie metody v tehnologijah i tehnike*, 2021, no. 4, pp. 11-15 (in Russ.). DOI: 10.52348/2712-8873_MMTT_2021_4_11
28. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. (1985) Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 285-317. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9
29. Rosenstein M.T., Collins J.J. (1994) Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1994, vol. 73, no. 1-2, pp. 82-98. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90226-7
30. Marius D. (2021) Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems, Part II: The non-commensurate case. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, vol. 31, no. 12. DOI: 10.1142/S021812742150187X
31. Marius D. [FO_Lyapunov_p]. Available at: https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/114610-fo_lyapunov_p (accessed: 11.03.2023).
32. Mirwais. [Largest Lyapunov Exponent with Rosenstein's Algorithm]. Available at: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38424-largest-lyapunov-exponent-with-roosenstein-s-algorithm> (accessed: 13.03.2023).
33. Wolf A. [Wolf Lyapunov exponent estimation from a time series]. Available at: <https://ch.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48084-wolf-lyapunov-exponent-estimation-from-a-time-series> (accessed: 11.03.2023).
34. Dobriyan V.V. (2023) [Neural network method for Lyapunov exponents spectrum calculation in analysis of classic systems nonlinear dynamics]. *Nejrokompjutery: razrabotka, primenenie*, 2023, vol. 25,

no. 2, pp. 30-40 (in Russ.). DOI: 10.18127/j19998554-202302-03

35. Shashikhin V.N., Budnik S.V., Golovina K.O. (2021) Control of the spectrum of Lyapunov charac-

teristic exponents in nonlinear large-scale systems. Computing, *Telecommunications and Control*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 37-51. DOI: 10.18721/JCSTCS.14404

Parameters Analysis of a Fractional Order Chaotic Chua System

I.V. Knyazev, Post-graduate, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

P.A. Ushakov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The problem of analyzing the parameters of a chaotic system of fractional order is considered. As an example, a chaotic system based on a Chua circuit of an integer order was chosen. To obtain a Chua circuit of fractional order, it is proposed to replace the capacitive elements in the original circuit with elements with fractal impedance. The purpose of the work is to create a mathematical model of a fractional order Chua circuit with real values of the circuit elements, on the basis of which to evaluate existing software products in the Matlab environment suitable for modeling chaotic fractional order systems, as well as to search for software products suitable for calculating the spectrum of Lyapunov exponents.

An analysis of ready-made solutions in the Matlab environment, from the literature known to us, showed that the most suitable option for modeling a system of differential equations of a fractional order is the «fde_pi12_pc» program. The selected program allows you to set all the system parameters of interest and has a relatively high accuracy due to the use of the predictor-corrector algorithm.

Based on this program, a domain for determining fractional indicators of the Chua system was constructed in which the presence of a characteristic attractor is visually observed. Existing software products in the Matlab environment are analyzed, allowing the calculation of Lyapunov exponents for chaotic systems described by fractional order differential equations. Of the solutions considered, the best, in our opinion, is the «FO_NC_Lyapunov» program. Using the selected program, a spatial graph of the spectrum of Lyapunov exponents was constructed when changing the fractional exponents of the Chua system. Based on the spatial graph of the spectrum of Lyapunov exponents and the criteria for the chaotic behavior of the system based on the values of Lyapunov exponents, a definition area was constructed with visualization of zones of chaotic behavior of the Chua system.

The domains of definition obtained by visual analysis of the presence of an attractor and calculating the spectrum of Lyapunov exponents for the same mathematical model did not coincide; therefore, there are currently no software products for reliably assessing the chaos of fractional order systems by calculating the spectrum of Lyapunov exponents.

Keywords: Chua circuit, Lyapunov exponents, Matlab, chaos, fractional order, element with fractal impedance.

Получено 08.06.2023

Образец цитирования

Князев И. В., Ушаков П. А. Анализ характеристик параметров хаотической системы Чуа дробного порядка // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2023. Т. 26, № 3. С. 96–106. DOI: 10.22213/2413-1172-2023-3-96-106.

For Citation

Knyazev I.V., Ushakov P.A. (2023) [Parameters Analysis of a Fractional Order Chaotic Chua System]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2023, vol. 26, no. 32, pp. 96-106 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2023-3-96-106.