

УДК 519.8:621.372.2(045)  
DOI: 10.22213/2413-1172-2024-1-102-112

## К выводу математической модели хаотической системы на примере цепи Чуа дробного порядка

И. В. Князев, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

П. А. Ушаков, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*Проведен анализ существующих математических моделей цепи Чуа дробного порядка, который показал, что во всех моделях дробный порядок достигается заменой производных первого порядка системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение классической цепи Чуа, производными дробного порядка с некоторыми отличиями в учете параметров и характере нелинейности диода Чуа. При этом правомерность такой замены никак не доказывается. В работе рассмотрен подход к формированию цепи Чуа дробного порядка, при котором в схеме цепи Чуа емкостные элементы заменяются специфическими элементами, компонентные уравнения которых представляют дифференциальные соотношения дробного порядка (так называемые элементы с фрактальным импедансом). При предварительной оценке условий возникновения хаоса существующей модели дробного порядка в MATLAB и ее аналога в программе схемотехнического моделирования OrCAD с использованием моделей элементов с фрактальным импедансом выяснилось, что результаты оценок не совпадают. Гипотезой несоответствия результатов моделирования стало предположение, что математическая модель цепи Чуа дробного порядка, полученная формальной заменой порядка производных, не отражает особенностей элементов с фрактальным импедансом и не может служить основой для аналоговой реализации цепи Чуа дробного порядка.*

*Получена математическая модель хаотической системы, построенная на примере цепи Чуа дробного порядка, содержащей элементы с фрактальным импедансом. Проведено сравнение результатов визуального наблюдения областей хаотического поведения математических моделей системы Чуа дробного порядка, описанной в литературе и полученной в данной работе, с помощью инструмента `fde_pi12_pc` в среде Matlab со схемотехнической моделью системы в среде OrCAD. Показано, что процент совпадения условий возникновения хаоса в математической модели по сравнению со схемотехнической моделью составил: с математической моделью, описанной в литературе, 11,8 %, с математической моделью, полученной в данной работе, 97 %. Следовательно, полученная математическая модель точнее соответствует схемотехнической модели цепи Чуа дробного порядка.*

**Ключевые слова:** цепь Чуа, хаос, дробный порядок, элемент с фрактальным импедансом.

**Введение**  
Хаос – это долговременное непредсказуемое поведение системы, характеризующееся изменением во времени выходных параметров, которые одновременно чрезвычайно чувствительны к начальным условиям и ограничены в конечном объеме пространства состояний [1, 2].

Одна из первых хаотических систем была названа в честь изобретателя профессора Леона Чуа (Leon Chua) [3] и впервые была реализована в начале 1980 годов. Цепь Чуа (ЦЧ) (рис. 1, а) до сих пор считается одной из самых простых схемотехнических реализаций с точки зрения общего количества компонентов. Она состоит из пассивного LC-контура, RC-фильтра нижних частот первого порядка и пятисегментного нечетно-симметричного кусочно-линейного резистора (рис. 1, б), который называется диодом Чуа.

Современное представление ЦЧ приведено на рисунке 2, где индуктивность заменена на гиратор, а нелинейная вольтамперная характеристика диода Чуа (см. рис. 1, б) формируется двумя параллельными преобразователями отрицательного сопротивления.

Математическую модель ЦЧ [4] можно получить, используя законы Кирхгофа, а также компонентные уравнения индуктивности и емкости. В результате получим математическую модель ЦЧ вида

$$\begin{cases} I_{C1} = I_G + I_g, \\ I_{C2} = -I_G + I_L, \\ U_L = -U_{C2} - U_{R1}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C1}(G(v_2 - v_1) - I_g), \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C2}(G(v_1 - v_2) + I_L), \\ \frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L}(-v_2 - I_L R1), \end{cases} \quad (1)$$

где  $I_g = G_b v_1 + 0,5(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|)$ ,  
 $G = 1/R$ ,  $G_a = -1/R6 - 1/R3$ ,  $G_b = -1/R6 + 1/R4$ ,  
 $E = (R6 \cdot E_{num}) / (R8 + R6)$ .

Для упрощения моделирования системы уравнений (1) введем следующие безразмерные коэффициенты:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{G_a}{G}; m_1 = \frac{G_b}{G}; \alpha = \frac{C2}{C1}; \beta = \frac{C2}{L \cdot G^2}; \\ \gamma &= \frac{C2 \cdot R1}{L \cdot G}; \tau = \frac{t \cdot G}{C2}; x = \frac{v_1}{E}; y = \frac{v_2}{E}; z = \frac{I_L}{E \cdot G}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя выражения для коэффициентов  $x$  и  $\tau$  (2), получим

$$\frac{dv_1}{dt} = E \frac{dx}{dt}; \quad (3)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{G}{C2}. \quad (4)$$

Выразим из уравнения (4)  $dt$  и подставим его в уравнение (3), получим

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{EG}{C2} \frac{dx}{d\tau}. \quad (5)$$

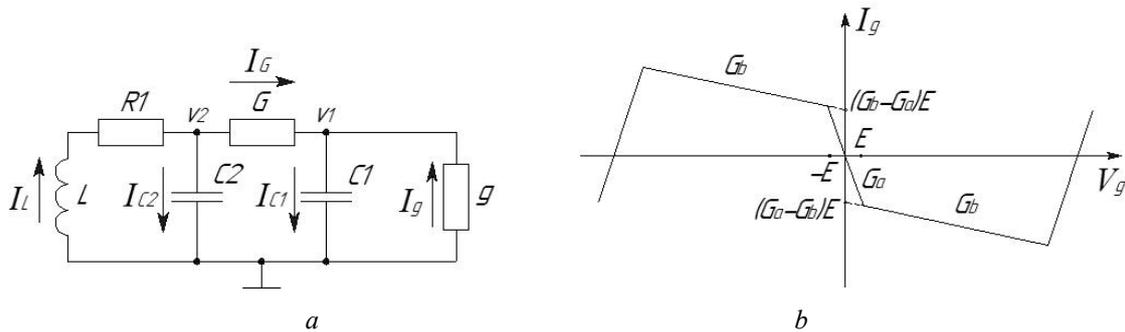


Рис. 1. Нелинейная характеристика диода Чуа: а – классическая ЦЧ; б – вольт-амперная ЦЧ

Fig. 1. Nonlinear characteristic of Chua diode: a - classic Chua circuit; b - current-voltage Chua circuit

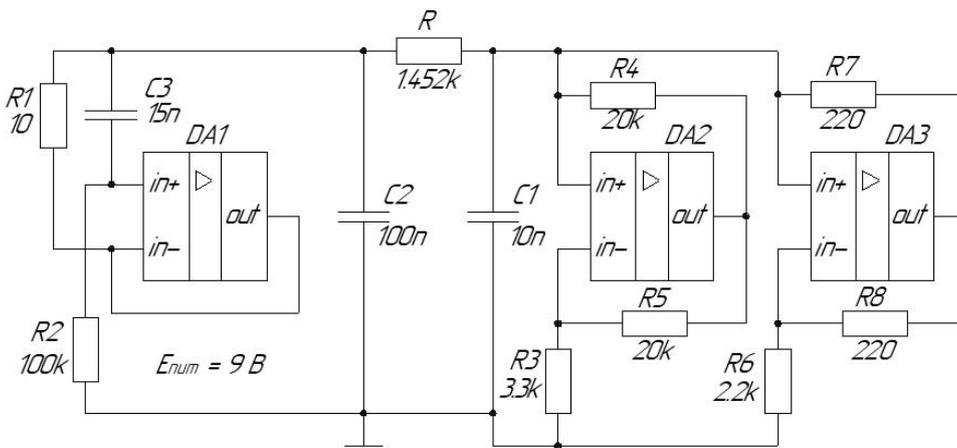


Рис. 2. Современное представление ЦЧ

Fig. 2. Modern version of the Chua circuit

Аналогичным образом получим остальные уравнения для системы уравнений (1):

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{EG}{C2} \frac{dy}{d\tau}; \quad (6)$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{EG^2}{C2} \frac{dz}{d\tau}. \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - h(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (8)$$

Тогда с учетом выражений для коэффициентов (2) можно представить классическую математическую модель ЦЧ в следующем виде:

где  $h(x) = \frac{I_g}{EG} = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ .

Хаотическое поведение систем в области радиоэлектронных устройств изучается уже давно, однако закономерности поведения хаотических систем дробного порядка [5, 6] и отличие их параметров от параметров хаотических систем целого порядка практически не изучены.

На наш взгляд существует два основных преимущества использования дробного исчисления в хаотических моделях. Во-первых, увеличивается нелинейность и сложность системы, что делает ее более привлекательной для повышения скрытности передачи данных. Во-вторых, дроб-

ный порядок можно рассматривать как дополнительный параметр, изменение которого в режиме реального времени позволит изменять поведение системы без изменения конструкции генератора хаоса.

Проведем краткий обзор математических моделей цепи Чуа дробного порядка (ЦЧДП), описанных в известной нам литературе. Результаты обзора представлены в таблице (обозначение переменных и коэффициентов были изменены в соответствии с теми, которые приняты в данной работе).

### Обзор математических моделей ЦЧДП

#### Review of mathematical models of the Chua circuit fractional order

Источник литературы	Математическая модель ЦЧДП	Описание математической модели
[7]	$\begin{cases} D_{\tau}^{\delta} x = -\alpha x + \alpha y - \alpha h(x) \\ D_{\tau}^{\delta} y = x - y + z \\ D_{\tau}^{\delta} z = -\beta y - \gamma z \end{cases}$	<p>где <math>h(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)( x+1  -  x-1 )</math>, <math>0 &lt;  \delta  \leq 1</math>, <math>D_{\tau}^{\delta}</math> – оператор дробного дифференцирования.</p> <p>В данной модели в отличие от (8) было заменено дифференцирование на оператор дифференцирования дробного порядка</p>
[8]	$\begin{cases} \frac{d^{\delta_1} x}{d\tau^{\delta_1}} = \alpha(y + bx + cx^3) \\ \frac{d^{\delta_2} y}{d\tau^{\delta_2}} = x - y + z \\ \frac{d^{\delta_3} z}{d\tau^{\delta_3}} = -\beta y - \gamma z \end{cases}$	<p>где <math>b</math> и <math>c</math> – некоторые масштабные коэффициенты задающие нелинейность, <math>0 &lt;  \delta_1, \delta_2, \delta_3  \leq 1</math>.</p> <p>В данной модели пятисегментная нечетно-симметричная кусочно-линейная неравномерность диода Чуа (см. рис. 1, <i>b</i>) заменена на кубическую неравномерность, которая упрощает запись математической модели</p>
[9]	$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha D_{\tau}^{1-\delta}(y - x - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$	<p>где <math>h(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)( x+1  -  x-1 )</math>, <math>0 &lt;  \delta  \leq 1</math>, <math>D_{\tau}^{1-\delta}</math> – оператор дробного интегрирования порядка <math>(1 - \delta)</math>.</p> <p>В данной модели не учитывается активное сопротивление индуктивности <math>L</math>, поэтому коэффициент <math>\gamma = 0</math>. Кроме этого данная модель содержит в себе оператор дробного интегрирования</p>
[10–12]	$\begin{cases} D_{\tau}^{\delta} x = \alpha \left( y + \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}x^3 \right) \\ D_{\tau}^{\delta} y = x - y + z \\ D_{\tau}^{\delta} z = -\beta y \end{cases}$	<p>где <math>0 &lt;  \delta  \leq 1</math>, <math>D_{\tau}^{\delta}</math> – оператор дробного дифференцирования.</p> <p>В данной модели используется кубическая неравномерность вместо неравномерности диода Чуа (см. рис. 1, <i>b</i>) и не учитывается активное сопротивление индуктивности <math>L</math> (<math>\gamma = 0</math>). Применены операторы дробного дифференцирования</p>
[13]	$\begin{cases} \frac{d^{\delta} x}{d\tau^{\delta}} = \alpha(y - x - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$	<p>где <math>h(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)( x+1  -  x-1 )</math>, <math>0 &lt;  \delta  \leq 1</math>.</p> <p>В данной модели не учитывается активное сопротивление индуктивности <math>L</math> (<math>\gamma = 0</math>). Дробным порядком обладает только первое уравнение системы</p>

В представленных работах, связанных с изучением ЦЧДП, не описывается методика получения самой математической модели ЦЧДП. При анализе результатов в таблице 1 видно, что

математические модели представляют собой замену производных первого порядка из системы дифференциальных уравнений (8) на производные дробного порядка с некоторыми отли-

чениями в учете параметров и характере нелинейности диода Чуа. В общем виде данные модели можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d^{\delta_1} x}{d\tau^{\delta_1}} = \alpha(y - x - h(x)), \\ \frac{d^{\delta_2} y}{d\tau^{\delta_2}} = x - y + z, \\ \frac{d^{\delta_3} z}{d\tau^{\delta_3}} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (9)$$

где  $h(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ ,  $0 < |\delta_1, \delta_2, \delta_3| \leq 1$ .

Одним из вариантов создания ЦЧДП является замена обычных емкостных элементов в ЦЧ (рис. 2) элементами, компонентные уравнения которых имеют вид

$$i(t)_C = C_F \frac{d^\delta v_c}{dt^\delta}, \quad (10)$$

где  $0 < |\delta| \leq 1$ .

Такие элементы будем называть элементами с фрактальным импедансом (ЭФИ) [14]. В результате такой замены ЦЧ преобразуется к виду, представленному на рисунке 3.

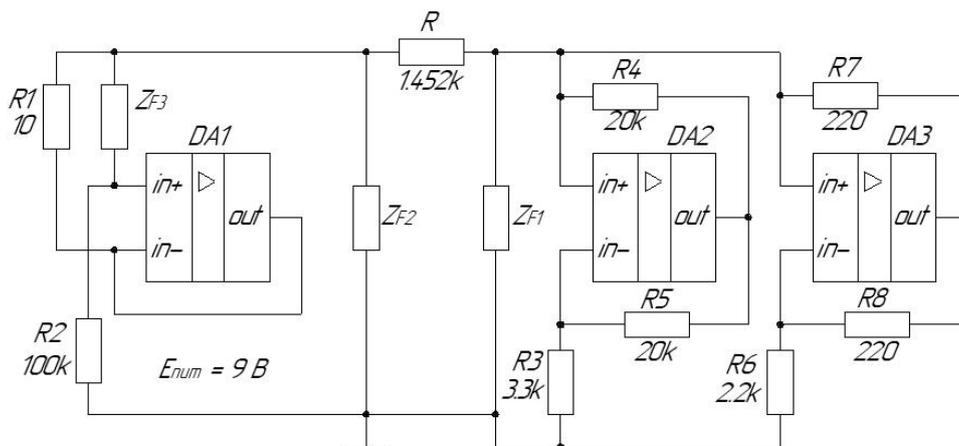


Рис. 3. ЦЧДП

Fig. 3. Chua circuit fractional order

На рисунке 3  $Z_{F1}, Z_{F2}, Z_{F3}$  – это ЭФИ, импеданс которых имеет постоянный фазовый сдвиг  $\varphi = (\delta \cdot \pi) / 2$  и определяется выражением вида [15]

$$Z_F = \frac{1}{\omega^\delta C_F} e^{-j\frac{\delta\pi}{2}}, \quad (11)$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $0 < |\delta| \leq 1$ ;  $C_F$  – константа, имеющая смысл псевдоемкости (фрактальная емкость).

Если размерность обычного емкостного элемента [Ф] или [с/Ом], то размерность фрактальной емкости  $C_F$  [с<sup>δ</sup>/Ом].

Поскольку зависимость тока через ЭФИ от напряжения на его выводах описывается дифференциальным уравнением дробного порядка (10), то схема ЦЧ, представленная на рисунке 3, также будет описываться системой дифференциальных уравнений дробного порядка.

Математическая модель (9) была использована в предыдущих работах авторов данной статьи при изучении ЦЧДП (например, Князев И. В.,

Ушаков П. А. Исследование условий возникновения хаотических колебаний в цепи Чуа дробного порядка / Нигматуллинские чтения : сборник докладов международной научной конференции. Казань : АНРТ, 2023. С. 46–53). В ходе экспериментов было замечено, что результаты схемотехнического моделирования в среде OrCAD не совпадают с результатами решения системы дифференциальных уравнений (9) в среде Matlab.

На наш взгляд такое несовпадение связано с тем, что простая замена производных целого порядка, характеризующих динамику классической ЦЧ производными дробного порядка для описания ЦЧДП, не отражает хаотическую динамику той ЦЧ, в которой емкостные элементы С1, С2 и С3 заменяются элементами с фрактальным импедансом.

**Целью** данной работы является вывод математической модели хаотической системы, построенной на примере ЦЧДП, содержащей элементы с фрактальным импедансом, необходимой для аппаратной реализации ЦЧДП.

### Вывод математической модели ЦЧДП

Для вывода системы дифференциальных уравнений ЦЧДП (рис. 3) будем использовать опыт вывода уравнений (5), (6) и (7) и выражения для параметров  $x, y, z, \tau$ , определенных в (2).

Продифференцируем уравнения (3) и (4) повторно, получим

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} = E \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} = 0. \quad (13)$$

Выразим  $dt$  из равенства (4), возведем его в квадрат и подставим в (12):

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} = E \left( \frac{G}{C2} \right)^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2}. \quad (14)$$

Если продолжить дальнейшее дифференцирование и возведение  $dt$  в соответствующую степень, то можно найти закономерность и записать дифференциальное уравнение порядка  $\delta$  (где  $\delta$  – вещественное число [16]) в общем виде как

$$\frac{d^\delta v_1}{dt^\delta} = E \left( \frac{G}{C2} \right)^\delta \frac{d^\delta x}{d\tau^\delta}. \quad (15)$$

Полагая, что в общем случае уравнение (15) справедливо и для  $\delta$ , лежащего в пределах от 0 до 1, получим дифференциальное уравнение дробного порядка. Выполним аналогичные операции с уравнениями (6) и (7):

$$\frac{d^\delta v_2}{dt^\delta} = E \left( \frac{G}{C2} \right)^\delta \frac{d^\delta y}{d\tau^\delta}; \quad (16)$$

$$\frac{d^\delta I_L}{dt^\delta} = EG \left( \frac{G}{C2} \right)^\delta \frac{d^\delta z}{d\tau^\delta}. \quad (17)$$

Чтобы учесть то, что в схеме на рисунке 3 емкостные элементы заменены элементами с фрактальным импедансом, найдем связь между емкостью  $C$  и фрактальной емкостью  $C_F$ . Для этого сопоставим выражение (11) с выражением емкостного импеданса:

$$C_F = j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0)^{1-\delta} \cdot C \cdot e^{\frac{-j\delta\pi}{2}}, \quad (18)$$

где  $f_0$  – основная частота системы в герцах;  $0 < |\delta| \leq 1$ ;  $C$  – номинал емкостного элемента, который заменен в цепи на ЭФИ.

За основную частоту в ЦЧ принимается резонансная частота фрактального LC-контура,

который образуется фрактальной емкостью  $Z_{F2}$  и фрактальной индуктивностью, образованной гиратором и фрактальной емкостью  $Z_{F3}$ . При этом выражение для фрактальной индуктивности имеет вид

$$L_F = R1 \cdot R2 \cdot C_{F3} = \\ = R1 \cdot R2 \cdot \left( j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0)^{1-\delta} \cdot C3 \cdot e^{\frac{-j\delta\pi}{2}} \right). \quad (19)$$

Тогда выражение для основной частоты, определенной по формуле Томсона, будет иметь вид

$$f_0 = \left( \frac{1}{2\pi \left( -R1 \cdot R2 \cdot C2 \cdot C3 \cdot e^{\frac{-j\pi(\delta2+\delta3)}{2}} \right)^{\frac{1}{4-\delta2-\delta3}}} \right). \quad (20)$$

С учетом сделанных преобразований дифференциальные уравнения (15)–(17) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^{\delta1} x}{d\tau^{\delta1}} = m(y - x - h(x)), \\ \frac{d^{\delta2} y}{d\tau^{\delta2}} = k(x - y + z), \\ \frac{d^{\delta3} z}{d\tau^{\delta3}} = -by - pz, \end{cases} \quad (21)$$

где  $h(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$ ;

$$0 < |\delta1, \delta2, \delta3| \leq 1; \quad m = \frac{C_{F2}^{\delta1} \cdot G}{C_{F1} \cdot G^{\delta1}}; \quad k = \frac{G \cdot C_{F2}^{\delta2}}{G^{\delta2} \cdot C_{F2}};$$

$$b = \frac{C_{F2}^{\delta3}}{R1 \cdot R2 \cdot C_{F3} \cdot G^{\delta3} \cdot G}; \quad p = \frac{C_{F2}^{\delta3}}{R2 \cdot C_{F3} \cdot G^{\delta3}};$$

$$m_0 = \frac{G_a}{G}; \quad m_1 = \frac{G_b}{G}; \quad \tau = \frac{t \cdot G}{C_{F2}}; \quad x = \frac{v_1}{E}; \quad y = \frac{v_2}{E};$$

$$z = \frac{I_L}{E \cdot G}.$$

### Сравнение областей хаотического поведения математических моделей ЦЧДП с областью хаотического поведения схмотехнической модели ЦЧДП

Сначала определим область хаотического поведения на схмотехнической модели (см. рис. 3). Поскольку речь идет о схмотехнической модели, вычислять показатели, говорящие о хаотичности системы, в данный момент не представляется возможным, так как отсутствуют готовые и подтвержденные экспериментами инст-

рументы анализа хаотичности по массиву временных диаграмм. Область хаотического поведения ЦЧ будем определять с помощью визуального наблюдения характерных видов аттракторов. Для моделирования ЦЧДП (см. рис. 3) будем использовать ЭФИ со структурой слоев вида *C-R-NC* [17], синтезированные в специализированной программе синтеза (Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022618127 от 29.04.2022. Программа синтеза элементов с фрактальным импедансом на основе резистивно-емкостных элементов со структурой слоев вида *C-R-NC* / Ушаков П. А., Князев И. В., Князева А. С.). Выбор ЭФИ со структурой слоев вида *C-R-NC* обосновывается тем, что данный вид ЭФИ позволяет создавать дробно-степенную зависимость импеданса от частоты  $\delta$  в диапазоне  $0,5 \dots 1$ . Для моделирования синтезированные ЭФИ подстраивались с помощью изменения удельных сопротивлений резистивного и диэлектрического слоев структуры ЭФИ, чтобы обеспечить выполнение равенства (18) на основной частоте  $f_0$ .

Схемотехнические модели ЭФИ со структурой слоев вида *C-R-NC* представляли собой многозвенные (256 звеньев) лестничные резистивно-емкостные цепи с соответствующей топологией. Количество звеньев обеспечивало заданную точность реализации показателя  $\delta$  в определенном диапазоне частот.

Эксперименты со схемотехнической моделью являются сложными и занимают много времени. В связи с этим было решено ограничить области сравнения хаотического поведения и принять их  $0,8 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$  при  $\delta_3 = 1$ . Результат полученной области визуального наблюдения хаотического поведения ЦЧДП представлен на рисунке 4.

Заштрихованная область на рисунке 4 соответствует области визуального наблюдения аттрактора, представленного на рисунке 5, *a*, закрашенная область – аттрактора вида, представленного на рисунке 5, *b*. Фазовый портрет на рисунке 5, *c* приведен в точке, в которой отсутствует хаос, но наблюдаются периодические колебания, для качественного сравнения результатов на рисунке 5 с фазовыми портретами на математических моделях.

Для корректной оценки областей хаотического поведения математических моделей ЦЧДП (9) и (21) сравним размерности левых и правых частей уравнений:

- для системы уравнений (9) при использовании размерности емкости [с/Ом] левые части уравнений имеют размерность  $[c^{1-\delta}]$ , а правая

часть системы безразмерна; при фрактальных размерностях [с<sup>δ</sup>/Ом] обе части уравнений являются безразмерными;

- для системы уравнений (21) при использовании размерности емкости [с/Ом] левые части уравнений безразмерны, а правая часть уравнений имеет размерность  $[c^{\delta-1}]$ ; при фрактальных размерностях [с<sup>δ</sup>/Ом] обе части уравнений имеют размерность  $[c^{\delta(\delta-1)}]$ .

Из этого следует, что необходимо сравнивать системы уравнений (9) и (21) только во фрактальных размерностях.

	$\varphi_2$ , град.	-72	-73,8	-75,6	-77,4	-79,2	-81	-82,8	-84,6	-86,4	-88,2	-90
$\varphi_1$ , град.	$\delta_2$	0,8	0,82	0,84	0,86	0,88	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98	1
-72	0,8											
-73,8	0,82											
-75,6	0,84											
-77,4	0,86											
-79,2	0,88											
-81	0,9											
-82,8	0,92											
-84,6	0,94											
-86,4	0,96											
-88,2	0,98											
-90	1											

Рис. 4. Область хаотического поведения ЦЧ при дробных показателях  $\delta_1$  и  $\delta_2$  на схемотехнической модели в среде OrCAD

Fig. 4. The area of chaotic behavior of the Chua circuit with fractional orders  $\delta_1$  and  $\delta_2$  on the circuit model in the OrCAD program

Решение системы дифференциальных уравнений (9) и (21) выполним с помощью инструмента *fde\_pi12\_pc* из работы [18]. В результате этого получим области визуального наблюдения аттракторов, представленные на рисунке 6.

Наблюдаемые фазовые портреты в точках, выбранных на рисунке 5 для системы уравнений (9), приведены на рисунке 7, а для системы уравнений (21) – на рисунке 8.

При сравнении рисунков 5, 7 и 8 видно, что фазовые портреты системы уравнений (21) наиболее приближены к фазовым портретам ЦЧДП, представленным на рисунке 5.

Поскольку проверяются условия существования хаотических колебаний в системах, описываемых уравнениями (9) и (21), то сравнение результатов работы моделей при отсутствии таких колебаний не имеет на данном этапе большого смысла.

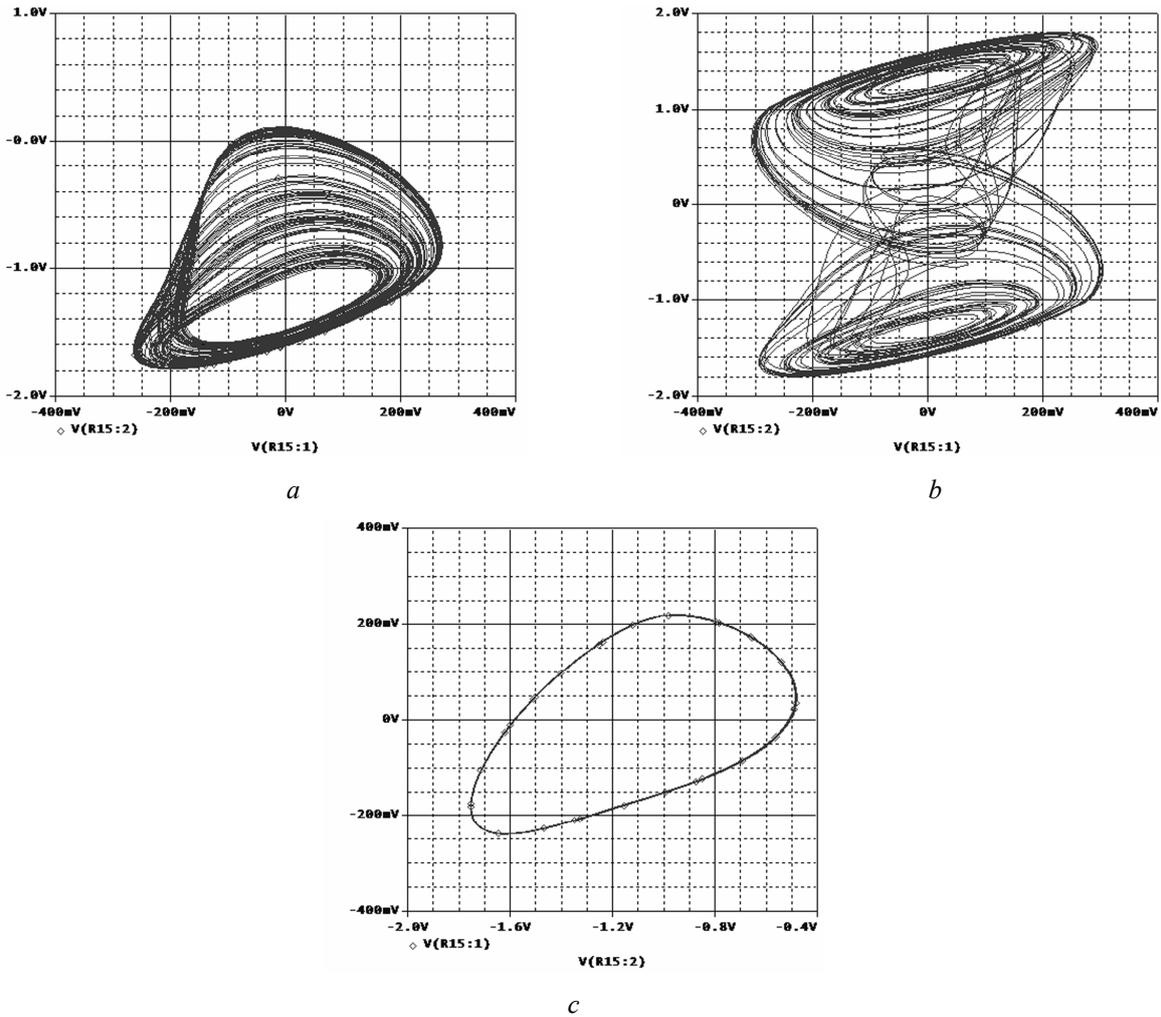


Рис. 5. Фазовые портреты ЦЧДП: *a* – при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,98$ ; *b* – при  $\delta_1 = 0,9$  и  $\delta_2 = 0,98$ ; *c* – при  $\delta_1 = 1$  и  $\delta_2 = 0,92$   
 Fig. 5. Phase portraits of a fractional order Chua circuit: *a* - with  $\delta_1 = \delta_2 = 0.98$ ; *b* - with  $\delta_1 = 0.9$  and  $\delta_2 = 0.98$ ; *c* - with  $\delta_1 = 1$  and  $\delta_2 = 0.92$

$\varphi_1$ , град.	$\delta_2$	$\varphi_2$ , град.										
		-72	-73,8	-75,6	-77,4	-79,2	-81	-82,8	-84,6	-86,4	-88,2	-90
-72	0,8											
-73,8	0,82											
-75,6	0,84											
-77,4	0,86											
-79,2	0,88											
-81	0,9											
-82,8	0,92											
-84,6	0,94											
-86,4	0,96											
-88,2	0,98											
-90	1											

*a*

$\varphi_1$ , град.	$\delta_2$	$\varphi_2$ , град.										
		-72	-73,8	-75,6	-77,4	-79,2	-81	-82,8	-84,6	-86,4	-88,2	-90
-72	0,8											
-73,8	0,82											
-75,6	0,84											
-77,4	0,86											
-79,2	0,88											
-81	0,9											
-82,8	0,92											
-84,6	0,94											
-86,4	0,96											
-88,2	0,98											
-90	1											

*b*

Рис. 6. Область хаотического поведения ЦЧ при дробных показателях  $\delta_1$  и  $\delta_2$  на математических моделях в среде Matlab: *a* – система уравнений (9); *b* – система уравнений (21)

Fig. 6. The area of chaotic behavior of the Chua circuit with fractional orders  $\delta_1$  and  $\delta_2$  on mathematical models in the Matlab: *a* - system of equations (9); *b* - system of equations (21)

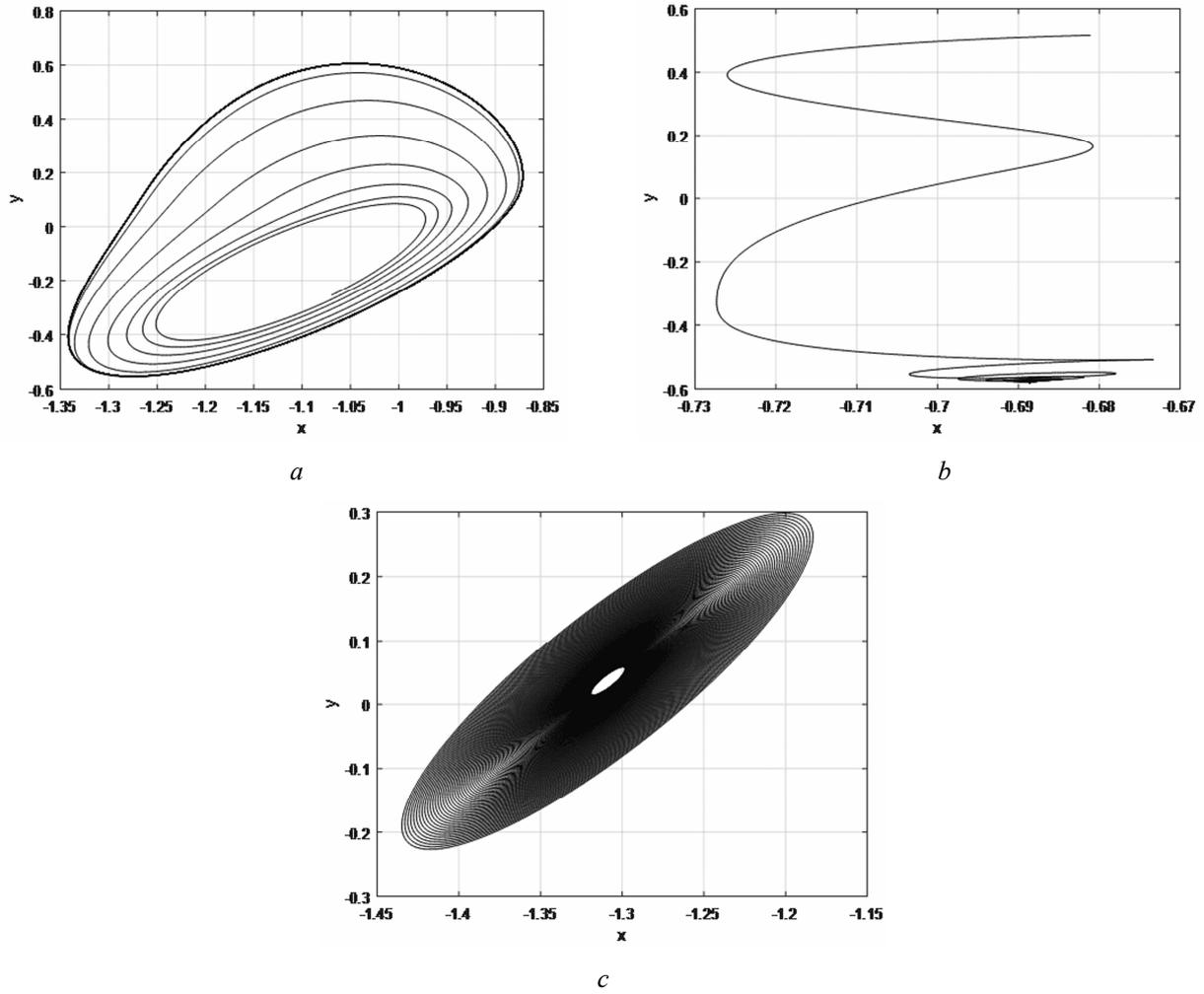


Рис. 7. Фазовые портреты системы уравнений (9) в точках: *a* – при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,98$ ; *b* – при  $\delta_1 = 0,9$  и  $\delta_2 = 0,98$ ; *c* – при  $\delta_1 = 1$  и  $\delta_2 = 0,92$

Fig. 7. Phase portraits of system of equations (9) at points: *a* - with  $\delta_1 = \delta_2 = 0,98$ ; *b* - with  $\delta_1 = 0,9$  and  $\delta_2 = 0,98$ ; *c* - with  $\delta_1 = 1$  and  $\delta_2 = 0,92$

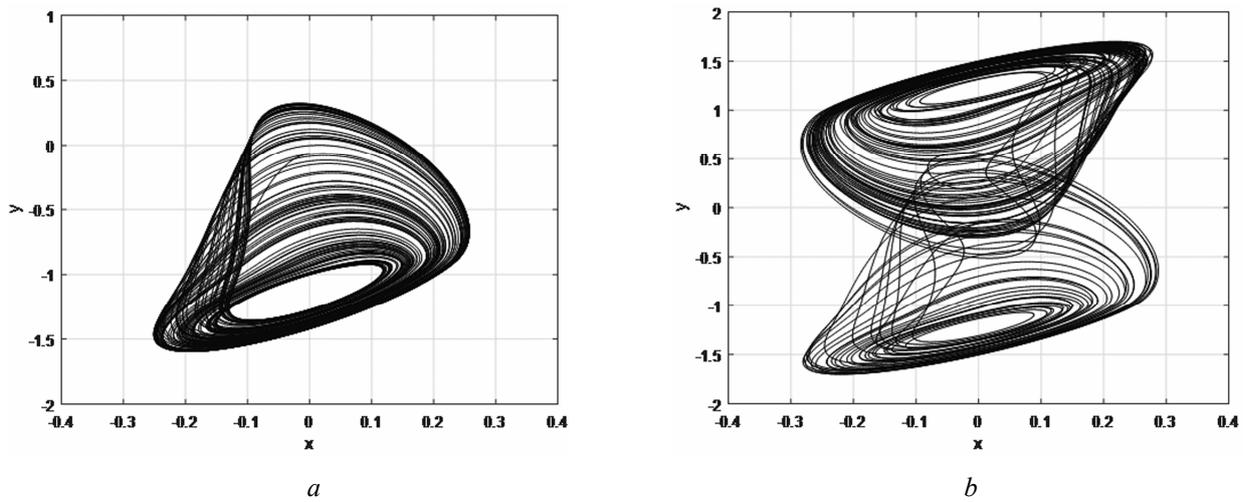


Рис. 8. Фазовые портреты системы уравнений (21) в точках: *a* – при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,98$ ; *b* – при  $\delta_1 = 0,9$  и  $\delta_2 = 0,98$

Fig. 8. Phase portraits of system of equations (21) at points: *a* - with  $\delta_1 = \delta_2 = 0,98$ ; *b* - with  $\delta_1 = 0,9$  and  $\delta_2 = 0,98$

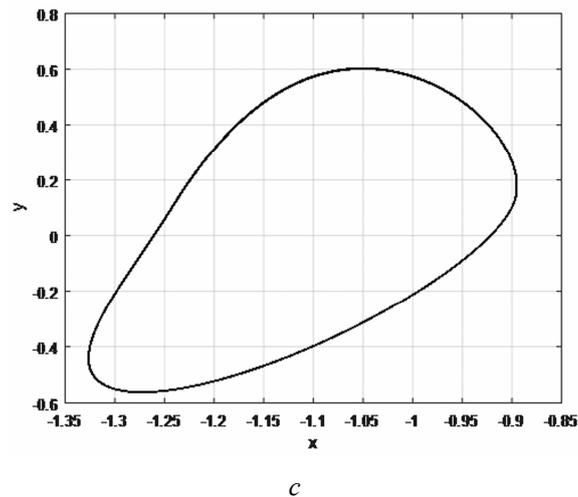


Рис. 8 (окончание, начало на с. 109):  $c$  – при  $\delta_1 = 1$  и  $\delta_2 = 0,92$

Fig. 8 (continued from p. 109):  $c$  - with  $\delta_1 = 1$  and  $\delta_2 = 0.92$

Сравнивая результаты на рисунках 4 и 6 с учетом характерных видов аттракторов (см. рис. 5) и принятием за 100%-й результат, полученный на рисунке 4, можно в процентном соотношении вычислить совпадения областей хаотического поведения систем Чуа дробного порядка:

- для системы уравнений (9) совпадение областей хаотического поведения составило 11,8 %;
- для системы уравнений (21) совпадение областей хаотического поведения составило 97 %.

Причина, по которой не было 100%-го совпадения областей хаотического поведения полученной математической модели (21) со схемотехнической моделью (см. рис. 3), вполне очевидна. Для решения системы (21) с помощью инструмента `fde_pi12_pc` в среде Matlab используется численный метод Грюнвальда – Летникова, в то время как при аналоговом моделировании реализуются операции интегрирования и дифференцирования сложными RC-цепями, результаты которых ближе к результатам, получаемым с помощью дифференциала Римана – Лиувилля, автоматически учитывающего неидеальности моделей ЭФИ (наличие неравномерности ФЧХ импеданса в ограниченном диапазоне частот).

### Выводы

Получена математическая модель хаотической системы на примере ЦЧДП (21), содержащей в своем составе элементы с фрактальным импедансом.

При сравнении границ хаотического поведения модели (21), полученных с помощью инструмента `fde_pi12_pc` в среде Matlab, с границами хаотического поведения схемотехнической модели ЦЧДП, содержащей в своем составе

элементы с фрактальным импедансом, наблюдалось совпадение в 97 % случаев. Это свидетельствует о том, что полученная математическая модель хаотической системы адекватно отражает хаотическое поведение схемотехнической модели.

Сравнение границ хаотического поведения математической модели ЦЧДП дробного порядка, полученной простой заменой производных целого порядка производными дробного порядка (9), с границами хаотического поведения схемотехнической модели ЦЧДП, содержащей в своем составе элементы с фрактальным импедансом, дает совпадение только 11,8 %. Следовательно, система (9) не способна адекватно отражать процессы в физически реализуемой модели ЦЧДП.

Таким образом, математическая модель (21) позволит более точно предсказать поведение схемотехнической, а в дальнейшем – физической реализации устройств, использующих ЦЧДП дробного порядка.

### Библиографические ссылки

1. *Petrzela J.* (2022) Chaos in Analog Electronic Circuits: Comprehensive Review, Solved Problems, Open Topics and Small Example. Mathematics, vol. 10, pp. 1-28. DOI: 10.3390/math10214108
2. *Datta A., Mukherjee A., Ghosh A.* (2021) Simulation and Analysis of a Chaos-Masking Communication Scheme Based on Electronic Simulator for Electro-Optic Modulator with Noise. SN Computer Science, vol. 2, no. 4, pp. 1-9. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00622-8>
3. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* (1986) The Double Scroll Family. IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 33, no. 11, pp. 1072-1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869

4. Petráš I. (2008) A note on the fractional-order Chua's system. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 38, pp. 140-147. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.10.054
5. Ahmad W.M., Sprott J. (2003) Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, no. 16, pp. 339-351. DOI: 10.1016/S0960-0779(02)00438-1
6. Mabrouk A., Azar A.T., Vaidyanathan S., Ouanas A., Radwan A. (2018) Applications of Continuous-time Fractional Order Chaotic Systems. In book: *Mathematical Techniques of Fractional Order Systems*, pp. 409-449. DOI: 10.1016/B978-0-12-813592-1.00014-3
7. Shah N.A., Ahmed I., Asogwa K., Zafar A., Weera W., Akgül A. (2022) Numerical study of a nonlinear fractional chaotic Chua's circuit. *AIMS Mathematics*, vol. 8(1), pp. 1636-1655. DOI: 10.3934/math.2023083
8. Odibat Z., Corson N., Alsaedi A. (2017) Chaos in Fractional Order Cubic Chua System and Synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27(10), pp. 1750161-1...1750161-13. DOI: 10.1142/S0218127417501619
9. Petráš I. (2002) Control of Fractional-Order Chua's System. *Journal Electrical Engineering*, vol. 53, no. 7-8, pp. 219-222.
10. Agarwal R., El-Sayed A., Moussa S. (2013) Fractional-order Chua's system: Discretization, bifurcation and chaos. *Advances in Difference Equations*, vol. 320, pp. 1-13. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-320
11. Özkaynak F. (2020) A Novel Random Number Generator Based on Fractional Order Chaotic Chua System. *Elektronika i Elektrotehnika*, vol. 26, pp. 52-57. DOI: 10.5755/j01.eie.26.1.25310
12. Cafagna D., Grassi G., Vecchio P. (2013) Chaos in the Fractional Chua and Chen Systems with Lowest-Order: Conference: Electronics, Circuits and Systems, 2008. ICECS 2008: 15th IEEE International Conference on. Malta, 2013, pp. 686-689. DOI: 10.1109/ICECS.2008.4674946
13. Gammoudi I., Feki M. (2013) Synchronization of integer order and fractional order Chua's systems using robust observer. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, pp. 625-638. DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.08.005
14. Elwakil A.S. (2010) Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area: *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 40-50. DOI: 10.1109/MCAS.2010.938637
15. Потапов А. А., Гильмутдинов А. Х., Ушаков П. А. Фрактальные элементы и радиосистемы: Физические аспекты / под ред. А. А. Потапова. М.: Радиотехника, 2009. 200 с. (Библиотека журнала «Нелинейный мир», научная серия «Фракталы. Хаос. Вероятность»).
16. Harir A., Melliani S., Chadli L.S. (2021) Solving Higher-Order Fractional Differential Equations by the Fuzzy Generalized Conformable Derivatives, *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, vol. 2021, pp. 1-8. <https://doi.org/10.1155/2021/5571818>
17. Christie C., Clements T., Humpal A., Kubanek D., Jerabek J., Šeda P., Dvorak J., Ushakov P. and Knyazev I. (2023) Design and Examples of Fractional-Order Capacitor Based on C-R-NC Layer Structure. 15th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Ghent, Belgium, pp. 91-96. DOI: 10.1109/ICUMT61075.2023.10333293
18. Garrappa R. (2018) Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*, vol. 6, no. 16, pp. 1-23. DOI: 10.3390/math6020016

## References

1. Petrzela J. (2022) Chaos in Analog Electronic Circuits: Comprehensive Review, Solved Problems, Open Topics and Small Example. *Mathematics*, vol. 10, pp. 1-28. DOI: 10.3390/math10214108
2. Datta A., Mukherjee A., Ghosh A. (2021) Simulation and Analysis of a Chaos-Masking Communication Scheme Based on Electronic Simulator for Electro-Optic Modulator with Noise. *SN Computer Science*, vol. 2, no. 4, pp. 1-9. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00622-8>
3. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. (1986) The Double Scroll Family: *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 33, no. 11, pp. 1072-1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869
4. Petráš I. (2008) A note on the fractional-order Chua's system. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 38, pp. 140-147. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.10.054
5. Ahmad W.M., Sprott J. (2003) Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, no. 16, pp. 339-351. DOI: 10.1016/S0960-0779(02)00438-1
6. Mabrouk A., Azar A.T., Vaidyanathan S., Ouanas A., Radwan A. (2018) Applications of Continuous-time Fractional Order Chaotic Systems. In book: *Mathematical Techniques of Fractional Order Systems*, pp. 409-449. DOI: 10.1016/B978-0-12-813592-1.00014-3
7. Shah N.A., Ahmed I., Asogwa K., Zafar A., Weera W., Akgül A. (2022) Numerical study of a nonlinear fractional chaotic Chua's circuit. *AIMS Mathematics*, vol. 8(1), pp. 1636-1655. DOI: 10.3934/math.2023083
8. Odibat Z., Corson N., Alsaedi A. (2017) Chaos in Fractional Order Cubic Chua System and Synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27(10), pp. 1750161-1...1750161-13. DOI: 10.1142/S0218127417501619
9. Petráš I. (2002) Control of Fractional-Order Chua's System. *Journal Electrical Engineering*, vol. 53, no. 7-8, pp. 219-222.
10. Agarwal R., El-Sayed A., Moussa S. (2013) Fractional-order Chua's system: Discretization, bifurcation and chaos. *Advances in Difference Equations*, vol. 320, pp. 1-13. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-320
11. Özkaynak F. (2020) A Novel Random Number Generator Based on Fractional Order Chaotic Chua System. *Elektronika i Elektrotehnika*, vol. 26, pp. 52-57. DOI: 10.5755/j01.eie.26.1.25310
12. Cafagna D., Grassi G., Vecchio P. (2013) Chaos in the Fractional Chua and Chen Systems with Lowest-Order: Conference: Electronics, Circuits and Systems, 2008. ICECS 2008: 15th IEEE International Conference

on. Malta, 2013, pp. 686-689. DOI: 10.1109/ICECS.2008.4674946

13. Gammoudi I., Feki M. (2013) Synchronization of integer order and fractional order Chua's systems using robust observer. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, pp. 625-638. DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.08.005

14. Elwakil A.S. (2010) Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area: IEEE Circuits and Systems Magazine, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 40-50. DOI: 10.1109/MCAS.2010.938637

15. Potapov A.A., Gil'mutdinov A.H., Ushakov P.A. (2009) *Fraktal'nyej element i radiosistemy: Fizicheskie aspekty* [Fractal elements and radio systems: Physical aspects]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 200 p. (*Biblioteka zhurnala "Nelinejnyj mir": Nauchnaja serija "Fraktaly. Haos. Veroyatnost"*) (in Russ.).

16. Harir A., Melliani S., Chadli L.S. (2021) Solving Higher-Order Fractional Differential Equations by the Fuzzy Generalized Conformable Derivatives. *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, vol. 2021, pp. 1-8. <https://doi.org/10.1155/2021/5571818>

17. Christie C., Clements T., Humpal A., Kubanek D., Jerabek J., Šeda P., Dvorak J., Ushakov P. and Knyazev I. (2023) Design and Examples of Fractional-Order Capacitor Based on C-R-NC Layer Structure: 15th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Ghent, Belgium, pp. 91-96. DOI: 10.1109/ICUMT61075.2023.10333293

18. Garrappa R. (2018) Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*, vol. 6, no. 16, pp. 1-23. DOI: 10.3390/math6020016

### To the Derivation of a Mathematical Model of a Chaotic System Using the Example of a Chua Circuit of Fractional Order

I.V. Knyazev, Post-graduate, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

P.A. Ushakov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

*An analysis of existing mathematical models of a fractional order Chua circuit was carried out, which showed that in all models the fractional order is achieved by replacing the first order derivatives of the system of differential equations that describe the behavior of the classical Chua circuit with fractional order derivatives with some differences in taking into account the parameters and the nature of Chua diode nonlinearity. However, such a replacement has not been justified in any way. The paper considers an approach to form a fractional order Chua circuit, where capacitive elements of a Chua circuit are replaced with specific elements, which component equations represent differential relations of a fractional order (the so-called "elements with fractal impedance").*

*During preliminary assessment of chaos emergence conditions of the existing fractional order model in MATLAB and its analogue the OrCAD circuit modeling program using element models with fractal impedance, it turned out that the assessment results do not coincide. The hypothesis for the discrepancy between modeling results was the assumption that the mathematical model of a fractional order Chua circuit, obtained by formal replacing the derivative order, does not reflect features of fractal impedance elements and cannot serve as the basis for an analog implementation of a fractional order Chua circuit.*

*A mathematical model of a chaotic system, built on the basis of a fractional-order Chua circuit containing elements with fractal impedance, is obtained.*

*The result comparison of visual observation of chaotic behavior areas of the fractional order Chua system mathematical model described in literature and obtained in this work using the fde\_pi12\_pc tool in Matlab with a circuit model of the system in OrCAD has been made. It is shown that the percentage of coincidence of the chaos occurrence conditions in the mathematical model in comparison with the circuit model was: with the mathematical model described in the literature - 11.8 %, and with the mathematical model obtained in this work - 97 %. Consequently, the resulting mathematical model corresponds to the circuit model of a fractional-order Chua circuit more accurately.*

**Keywords:** Chua circuit, chaos, fractional order, element with fractal impedance.

Получено 08.02.5024

#### Образец цитирования

Князев И. В., Ушаков П. А. К выводу математической модели хаотической системы на примере цепи Чуа дробного порядка // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2024. Т. 27, № 1. С. 102–112. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-1-102-112

#### For Citation

Knyazev I.V., Ushakov P.A. (2024) [To the Derivation of a Mathematical Model of a Chaotic System Using the Example of a Chua Circuit of Fractional Order]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 102-112 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2024-1-102-112