

УДК 621.839.36

DOI: 10.22213/2413-1172-2024-4-22-30

## Структурно-кинематические особенности трехзвенных центроидных механизмов и синтез некруглых зубчатых колес планетарно-роторной гидромашины

Г. Ю. Волков, доктор технических наук, доцент, Курганский государственный университет, Курган, Россия  
Ю. В. Алексеева, Курганский промышленный техникум, Курган, Россия

*Развитие современных технологий открывает новые возможности производства и использования центроидных механизмов, в том числе планетарных роторных гидромашин. Задача профилирования некруглых зубчатых колес таких гидромашин пока не получила своего окончательного решения. Разработанные ранее методы либо не обеспечивали приемлемую форму зубьев, либо требовали наличия повышенных зазоров в зацеплениях. В данной статье задача проектирования гидромашин решается на базе анализа общих принципов строения трехзвенных центроидных механизмов. Изучаются особенности проектирования центроидных механизмов с круглыми и некруглыми колесами. Подчеркивается значение теорем Аронгольда – Кеннеди и Виллиса в геометрическом синтезе таких механизмов. Применительно к синтезу некруглых зубчатых колес планетарного механизма с плавающими сателлитами установлено, что в этом механизме переносное движение сателлитов не может осуществляться с постоянной угловой скоростью. Углубленный анализ вопроса позволил разработать более точный метод проектирования рабочего механизма планетарно-роторных гидромашин. Этот метод включает следующие этапы: выбор параметров прототипа проектируемого рабочего механизма гидромашин – исходного, расчетного круглозвенного планетарного механизма; выбор расчетных траекторий центра сателлита в системах координат, связанных с каждым из центральных зубчатых колес, которые описываются общей циклической функцией; расчет угловых положений сателлита, соответствующих различным фазам его движения; расчет поправки радиального положения сателлита, задающего профиль зубьев эпицикла; графическое построение профилей некруглых колес как огибающих производящего сателлита. Новый метод обеспечивает отсутствие интерференции зубьев и благоприятные условия передачи движения в зубчатых зацеплениях. Метод достаточно прост и может быть использован широким кругом инженеров-расчетчиков на базе отечественных программных комплексов.*

**Ключевые слова:** планетарно-роторная гидромашина, плавающие сателлиты, некруглые зубчатые колеса, центроидный механизм, теорема Аронгольда – Кеннеди.

### Введение

Развитие современных технологий открывает новые возможности производства и использования центроидных механизмов, в том числе планетарных роторных гидромашин с плавающими сателлитами.

В основе таких машин лежит планетарный механизм (см. например, рис. 1). Его центральные колеса  $1$  и  $2$  выполнены некруглыми с числами волн  $M$  и  $N$  соответственно, а сателлиты  $3$  – плавающие. В силу того что центроиды колес  $1$  и  $2$  не являются окружностями постоянного радиуса, объем полости, заключенной между этими колесами и сателлитами  $3$ , циклически изменяется.

Принципиальные схемы рабочих механизмов таких машин были известны достаточно давно (патенты: US 6230823, WO 0166948, RU 2513057 и др.). Геометрическому проектированию подобных машин посвящены работы [1, 2]. Воз-

можности их использования рассматриваются в работах [3–5]. Комплексное исследование планетарных гидромашин выполнено нашим соотечественником Ан И-Каном [6–8].

Несмотря на интерес, проявляемый в мире к планетарно-роторным гидромашинам, задача профилирования некруглых зубчатых венцов их центральных колес пока не получила своего окончательного решения. В том числе разработанные ранее методы геометрического расчета [9–11] либо не обеспечивали приемлемую форму зубьев, либо требовали наличия повышенных зазоров в зацеплениях.

Целью данного исследования является анализ факторов, определяющих геометрические особенности различных механизмов с некруглыми зубчатыми колесами, и уточнение метода проектирования звеньев рабочего механизма планетарно-роторной гидромашин.

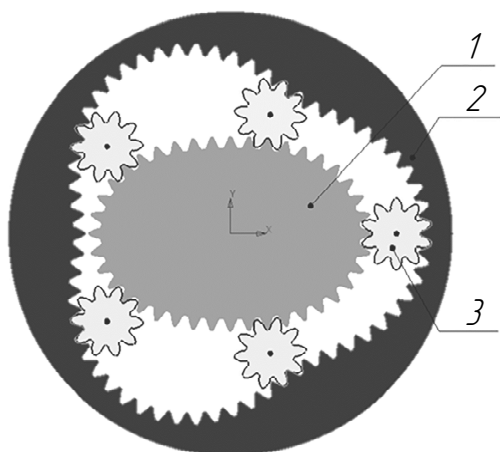


Рис. 1. Схема планетарно-роторной гидромашины ( $M = 2; N = 3$ )

Fig. 1. Diagram of a planetary rotary hydraulic machine ( $M = 2; N = 3$ )

**Структурно-кинематические особенности трехзвенных центроидных механизмов**

Корректное разрешение проблем, возникающих при синтезе механизма планетарно-роторной гидромашины, требует глубокого понимания особенностей строения механических систем с центроидными кинематическими парами.

Центроида – это геометрическое место центров (полюсов) относительного вращения звеньев механизма в системах координат, связанных с этими звеньями. Центроидные механизмы относятся к семейству плоских механизмов. Будем считать, что в них присутствуют только два вида кинематических пар 5-го класса: вращательная, обозначим ее  $B$ , и собственно центроидная, обозначим  $C$ . Центроидная пара  $C$  может реализоваться силами трения качения, но с практической точки зрения более важна эквивалентная ей высшая двухточечная пара [12], реализуемая беззазорным зацеплением зубчатых венцов.

Геометрическое проектирование интересующих нас планетарных механизмов сводится к расчету замкнутой трехзвенной кинематической цепи, которая включает три кинематических пары. Возможны четыре варианта таких цепей:  $BVB$ ;  $BVC$ ;  $BCC$ ;  $CCC$ .

Число степеней свободы относительного движения звеньев плоской кинематической цепи определяется формулой Чебышева:

$$W = 3(m - 1) - 2P_5 - P_4 + L - Y, \quad (1)$$

где  $m$  – число звеньев;  $P_5$  – число пар 5-го класса;  $P_4$  – число пар 4-го класса;  $L$  и  $Y$  – проявление

особой, аномальной, подвижности механической системы – «лишние» степени свободы ( $L$ ) и «пассивные» связи ( $Y$ ).

При отсутствии аномальной подвижности кинематическая цепь с тремя звеньями ( $m = 3$ ) и тремя парами 5-го класса ( $P_5 = 3$ ) согласно формуле Чебышева (1) имеет число степеней свободы  $W = 0$ . Подвижность она приобретает благодаря наличию параметрического соотношения, которое следует из теоремы Аронгольда – Кеннеди [13] о трех центрах вращения: «Мгновенный центр  $P_{12}$  относительного вращения тел  $1$  и  $2$  лежит на линии, соединяющей точки  $P_{13}$  и  $P_{23}$ , которые являются мгновенными центрами вращения тел  $1$  и  $2$  относительно тела  $3$ ».

Рассмотрим простейшие примеры трехзвенных центроидных кинематических цепей  $BVB$ ,  $BVC$  и  $BCC$ .

**Вариант  $BVB$ .** Это шарнирно-рычажная система. В общем случае (рис. 2, *a*) она представляет собой жесткий треугольник. Однако в особой конфигурации (рис. 2, *b*), когда все шарниры располагаются на одной линии, трехзвенная система получает локальную (мгновенную) подвижность  $W = 1$  – возможность поперечного смещения одного из шарниров относительно прямой, соединяющей два других шарнира. Расположение трех шарниров (т. е. полюсов) на одной прямой одновременно с появлением мгновенной подвижности делает систему статически неопределимой в направлении этой прямой.

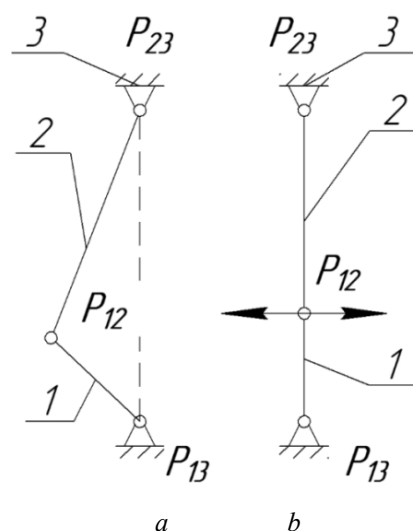


Рис. 2. Трехзвенная центроидная система со всеми вращательными парами ( $BVB$ ): *a* – общий случай; *b* – вырожденный случай

Fig. 2. Three-link centroid system with all rotational pairs: *a* - general case; *b* - degenerate case

**Вариант ВВС.** При круговых центроидах это обычная фрикционная или зубчатая передача с внешним (рис. 3, *a*) или внутренним (рис. 3, *b*) зацеплением. Данная система обладает уже не локальной, а широкой (глобальной) подвижностью [14]. Полюсы  $P_{12}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{13}$  друг относительно друга неподвижны. В зубчатом варианте статическая неопределимость системы в направлении межосевой прямой устраняется зазорами в зацеплении. Основная кинематическая характеристика рассматриваемого механизма (его передаточная функция) определяется тем обстоятельством, что два ( $P_{23}, P_{13}$ ) из трех полюсов совпадают с центрами вращения колес, поэтому полюс зацепления  $P_{12}$  в соответствии с теоремой Аронгольда – Кеннеди всегда находится на межосевом отрезке. В соответствии же с теоремой Виллиса отношение расстояний между полюсами  $P_{23}$ ,  $P_{12}$  и  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  пропорционально передаточному отношению  $i_{12}$ , т. е.  $P_{23}P_{12} / P_{12}P_{13} = i_{12}$ .

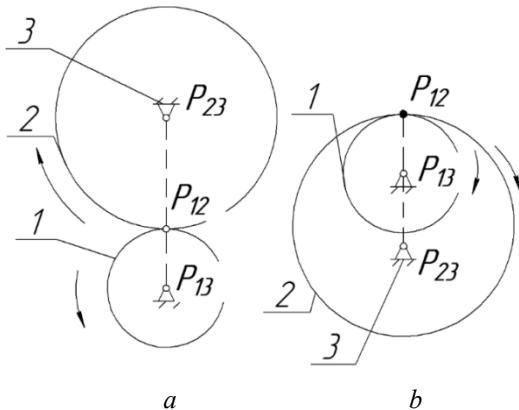


Рис. 3. Система ВВС с круглыми центроидами: *a* – внешнее зацепление; *b* – внутреннее зацепление

Fig. 3. RRC system with round centroids: *a* - external gear; *b* - internal gear

Методика расчета механизмов системы ВВС с круглыми центроидами не представляет сложности и приводится в справочной и учебной литературе. Отмеченные выше принципиальные свойства системы ВВС в полной мере распространяются и на случай некруглых колес (рис. 4). Тем не менее геометрическое проектирование таких механизмов является достаточно сложной задачей и разными авторами решается по-разному.

Классический синтез некруглых зубчатых колес методами теории зацеплений рассматривался еще в работах Ф. Л. Литвина [15]. К сожалению, такой подход пока не привел к созданию

приемлемой для широкого круга пользователей методики их расчета. Другой подход предполагает синтез центроид и последующее их «озубнение» [16]. Этот метод тоже весьма трудоемкий и заведомо неточный. Более перспективным представляется метод, включающий графическое огибание некоторых производящих контуров [17–19].

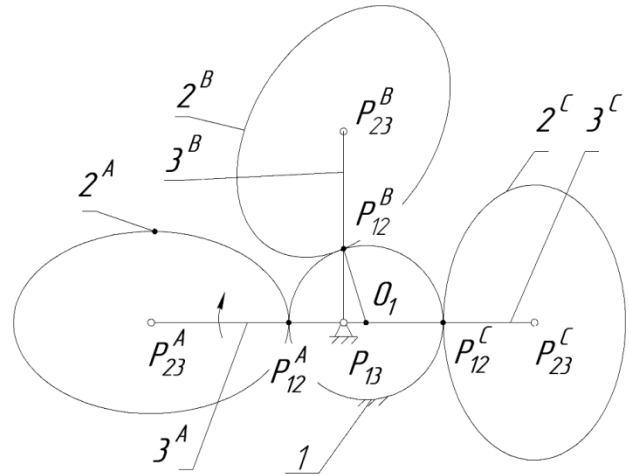


Рис. 4. Система ВВС с эксцентричной и некруглой центроидами

Fig. 4. VBC system with eccentric and non-circular centroids

При некруглых центроидах мгновенное передаточное отношение  $i_{12}$  не остается постоянным, а варьируется в соответствии с положением полюса  $P_{12}$  на межосевой прямой  $P_{23}$ ,  $P_{13}$ . Дополнительное параметрическое условие для систем ВВС с некруглыми центроидами возникает, если каждое из колес совершит не менее одного полного оборота. Отношение  $U = N/M$  чисел циклов изменения кривизны таких центроид (в простейшем случае – чисел волн) должно быть целым числом.

В случае с некруглыми зубчатыми колесами число  $U$  совпадает с соответствующим отношением чисел зубьев:  $U = N/M = Z_2/Z_1$ . На рисунке 4 изображена система ВВС, в которой центроида звена 1 является окружностью с центром  $O_1$ , смещенным относительно полюса  $P_{13}$ . Звено 1 остановлено, а звено 3 поворачивается относительно полюса  $P_{13}$ . В положении *A* прямая, содержащая полюсы  $P_{13}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  (фигурирующая в теореме Аронгольда – Кеннеди) проходит через точку  $O_1$ . При этом радиус вектор  $P_{23}P_{12}$  центроиды 2 и передаточное отношение  $i_{12}$  принимают свои максимальные значения. В положении *B* прямая, проходящая через точки  $P_{13}$ ,

$P_{12}$ ,  $P_{23}$ , расположена перпендикулярно эксцентриситету  $O_1P_{13}$ . Полюс  $P_{12}$  находится в точке пересечения круговой центроиды  $1$  с прямой  $P_{13}P_{23}$ . Общая касательная к центроидам  $1$  и  $2$  перпендикулярна радиусу  $O_1P_{12}$ . В соответствии с теоремой Виллиса в каждой фазе движения механизма передаточное отношение  $i_{12} = P_{23}P_{12} / P_{23}P_{13}$ .

Синтез механизма системы ВВС с зубчатыми некруглыми колесами может выполняться, например, по алгоритму, рассмотренному в работе [20] (рис. 5).

На первом этапе выбираются числа волн  $N$ ,  $M$  и числа зубьев  $Z_2$ ,  $Z_1$  колес, а также другие исходные параметры. В примере на рисунке 4 одно из колес является круглым, но закреплено на валу эксцентрично; число волн этого колеса  $M = 1$ . Зададим передаточное число  $U = 2$ , соответственно,  $N = 2$ . Примем величину модуля  $m = 1$ ; числа зубьев  $Z_1 = 25$ ;  $Z_2 = 50$ ; коэффициент смещения  $X_1 = 0$ . Тогда межосевое расстояние

$$a_w = \frac{Z_1(U+1)m_w}{2}. \quad (2)$$

На следующем этапе выполняется расчет текущего радиус-вектора  $r_1$  центроиды  $1$  и соответствующего ему угла  $\varphi_2$  поворота колеса  $2$ . Используя расчетную схему (см. рис. 5) и зависимости (2)–(6), выведенные авторами работы [21], получим

$$r_1 = AC - QC = \sqrt{r_2^2 - (e \cdot \sin \varphi_1)^2} - e \cdot \cos \varphi_1, \quad (3)$$

где  $e$  – эксцентриситет шестерни;  $\varphi_1$  – текущий угол поворота шестерни,

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{r \cdot \sin \varphi}{r \cdot \cos \varphi - e}\right), \quad (4)$$

$\varphi$  – угол расположения точки на центроиде  $1$  в системе координат, связанной с геометрическим центром круглой шестерни.

Угол поворота  $\varphi_2$  колеса определяется из условия качения центроид без скольжения, т. е. в соответствии с теоремой Виллиса:

$$r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2, \quad (5)$$

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\left(a_w / \sqrt{r_2^2 - (e \cdot \sin \varphi_1)^2} - e \cdot \cos \varphi_1\right) - 1}. \quad (6)$$

Далее выполняется виртуальная обкатка колеса  $2$  шестерней  $1$  или ее технологическим

аналогом, результатом которой будет семейство кривых – профилей сателлита, которое выглядит как черное поле (рис. 6). Итоговая операция нахождения профиля некруглого зубчатого колеса  $2$  – это получение огибающей семейства кривых при помощи одной из графических компьютерных программ.

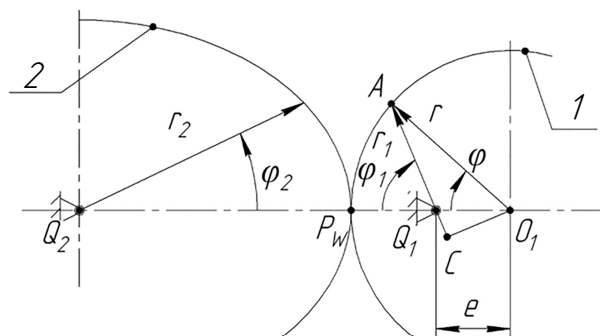


Рис. 5. Центроиды передачи  $M = 1$ ;  $N = 2$   
Fig. 5. Transmission centroids  $M = 1$ ;  $N = 2$

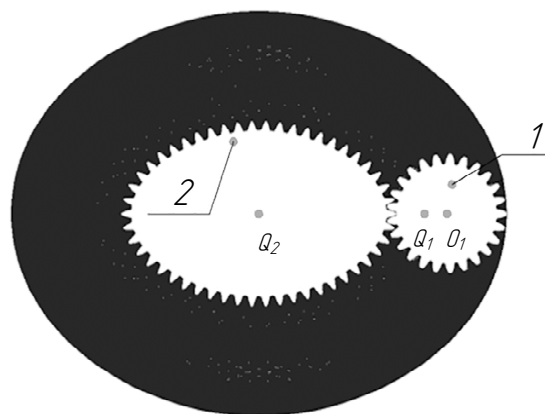


Рис. 6. Зацепление эксцентричного ( $M = 1$ ) и некруглого ( $N = 2$ ) зубчатых колес  
Fig. 6. Meshing of eccentric ( $M = 1$ ) and non-circular ( $N = 2$ ) gears

**Вариант ВСС.** Рассмотрим сначала частные случаи такой системы (рис. 7), когда центроиды всех трех звеньев являются окружностями, а центры двух из этих окружностей совпадают в полюсе  $P_{12}$ . Такая система обладает глобальной подвижностью, а ее геометро-кинематический расчет подобен расчету сдвоенной системы ВВС. При постоянной угловой скорости  $\omega_1$  звена  $1$  переносная угловая скорость  $\omega_{H3}$  звена  $3$  (т. е. угловая скорость мнимого водила) во всех фазах движения механизма остается постоянной.

Схема на рисунке 7,  $b$  отличается от схемы на рисунке 7,  $a$  тем, что на ней сателлит  $2$  во внешнем и внутреннем зацеплениях (соответ-

вующих полюсам  $P_{13}$  и  $P_{23}$ ) имеет разные начальные диаметры. Как во фрикционном, так и в зубчатом планетарном механизме это возможно в случае использования двухвенцового сателлита 3. В зубчатых механизмах подобный эффект обеспечивается также при разных коэф-

фициентах смещения на центральной шестерне 1 и эпицикле 2. Для зубчатых планетарных механизмов с несколькими сателлитами обязательно выполнение так называемого условия сборки, которое связывает число сателлитов с числами зубьев  $Z_1, Z_2$  центральных колес.

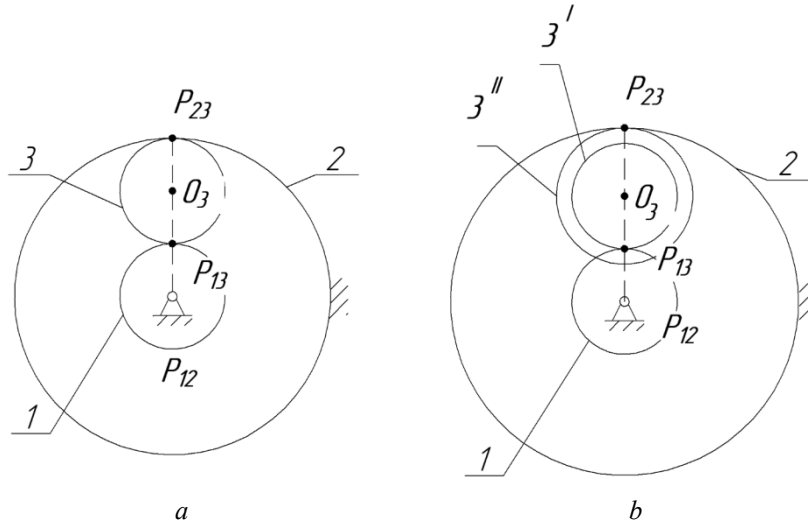


Рис. 7. Система ВСС стремя круглыми центроидами: а – одновенцовый сателлит; б – двухвенцовый сателлит  
 Fig. 7. BCC system with three round centroids: a - single crown satellite; b - double-crowned double-crowned satellite

Далее рассмотрим систему ВСС (рис. 8), отличающуюся от предыдущей тем, что геометрический центр  $O_1$  круглой центроиды 1 не совпадает с шарниром-полюсом  $P_{12}$ . В примере звенья 1 и 3 имеют одинаковые расчетные (делительные) диаметры. При заданном относительном положении звена 1 (солнечной шестерни) и звена 2 (эпицикла) каждый из сателлитов 3 находится

в разных фазах своего движения. Такая центроидная система реализована в зубчатом планетарном механизме, известном по изобретению Dock Herman (US 1087735) – первому патентному документу, относящемуся к планетарно-роторным гидромашинам. Проектирование подобных механизмов представляет задачу, не получившую до настоящего времени четкого решения.

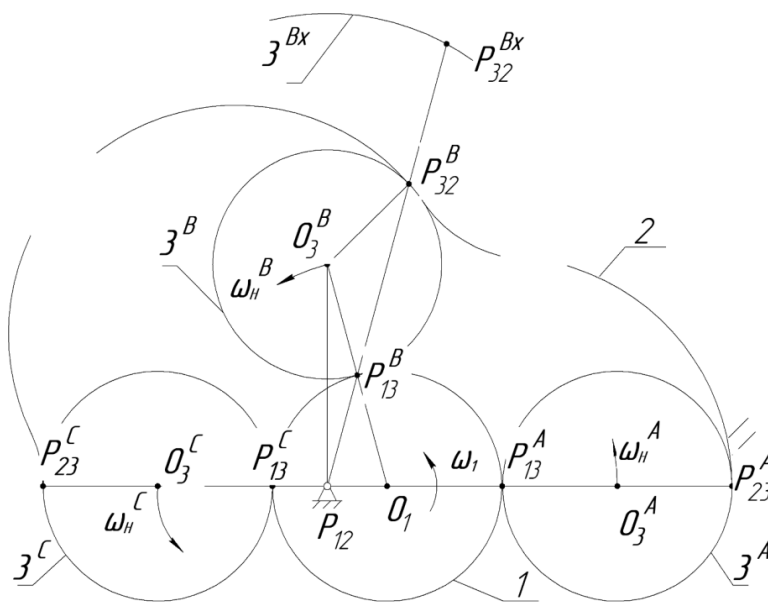


Рис. 8. Система ВСС с круглой 3, эксцентричной 1 и некруглой 2 центроидами ( $M = 1; N = 3$ )  
 Fig. 8. BCC system with 3 round, 1 eccentric and 2 non-circular centroids ( $M = 1; N = 3$ )

Заметим, что при заданных положении звена 1 и законе движения центра сателлита 3 процедура построения центроиды 2 затруднения не вызывает. Проблема состоит в том, что в подобных механизмах переносная угловая скорость  $w_H$  движения центра сателлита относительно звеньев 1 и 2 не остается постоянной. Она должна изменяться в течение цикла по некоторому закону, который заранее не известен и в ходе графического синтеза в явном виде не фигурирует.

При постоянной угловой скорости  $w_H$  отношение длин дуг  $P_{23}^A P_{23}^B / P_{13}^A P_{13}^B$ , измеренных по соответствующим центроидам 2 и 1, не получается равным отношению  $N/M$ . В случае использования зубчатых зацеплений, например эвольвентных, отмеченное несоответствие может быть компенсировано фактической модификацией центроиды сателлита (кривая  $3^{bx}$  на рис. 8). При этом на отдельных участках венца эпицикла 2 профиль его зубьев будет аналогичен профилю, полученному с большим положительным коэффициентом  $X$  смещения инструмента. Во многих схемах планетарных гидромашин получаемая таким путем форма зубьев эпицикла 2 оказывается неприемлемой (рис. 9).

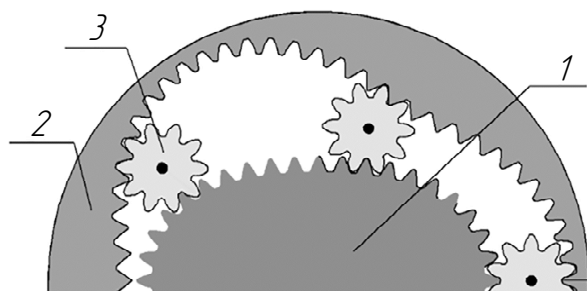


Рис. 9. Неприемлемая форма зубьев эпицикла на отдельных участках его венца

Fig. 9. Unacceptable shape of the epicycle teeth in certain areas of its crown

Если спроектировать зубчатый венец эпицикла 2 так, чтобы начальный шаг его зубьев был постоянным на всех участках этого венца, то на расчетных схемах механизма при постоянной угловой скорости  $w_H$  мнимого водила в определенных фазах движения будет наблюдаться интерференция зубьев сателлита 3 и эпицикла 2 (рис. 10).

В реальности плавающий сателлит 3 провернется так, чтобы его зубья вошли во впадины зубчатого венца эпицикла 2, однако поместиться в этих впадинах сателлит может только с некоторым натягом.

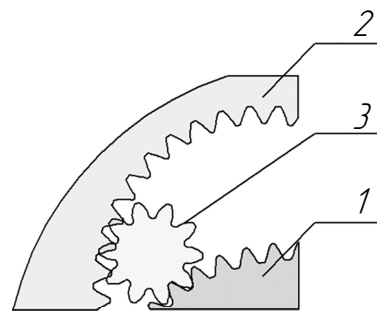


Рис. 10. Интерференция зубьев эпицикла и сателлита

Fig. 10. Interference of epicycle and satellite teeth

### Алгоритм синтеза некруглых зубчатых колес планетарного механизма с плавающими сателлитами

Разработан метод синтеза некруглых зубчатых колес планетарно-роторной гидромашины, предусматривающий введение некоторой поправки на величину радиус-вектора центроиды эпицикла 2, которая устраняет упомянутый выше натяг [22].

Разработанная методика включает следующие этапы (см. рис. 1).

1. Задаются числа волн  $M$  солнечной шестерни и  $N$  эпицикла. В примере  $M = 2$ ;  $N = 3$ . Выбираются числа зубьев  $Z_1, Z_2$  колес 1 и 2. При этом соблюдается условие сборки:  $Z_1 = CM$ ;  $Z_2 = CN$ , где  $C$  – целое число. В примере  $Z_1 = 40$ ;  $Z_2 = 60$ , число зубьев сателлита  $Z_3 = 10$ .

2. Выбираются параметры прототипа проектируемого рабочего механизма гидромашины – исходного, расчетного круглозвенного планетарного механизма: модуль  $m$ ; коэффициенты смещения инструмента  $X_1, X_2, X_3$ ; межосевое расстояние  $a_w$ . В примере  $X_1 = 0$ ;  $X_2 = 0,6$ ;  $X_3 = 0,3$ ;  $a_w = 25,288m$ .

3. Выбираются расчетные траектории центра сателлита в системах координат, связанных с каждым из центральных зубчатых колес 1 и 2, которые описываются циклической функцией  $F(\varphi)$ :

$$r_1(\varphi_1) = r_0(1 + kF(M\varphi_1)); \quad (7)$$

$$r_2(\varphi_2) = r_0(1 + kF(N\varphi_2)), \quad (8)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – текущие углы поворота мнимого водила в полярных координатах, связанных с соответствующими звеньями;  $r_1(\varphi_1)$  и  $r_2(\varphi_2)$  – радиус-векторы траекторий центра сателлита;  $k$  – коэффициент некруглости траекторий;  $r_0 = a_w$  – радиус окружности, в которую вырождаются обе траектории при  $k = 0$ .

В примере функция  $F(\varphi) = \cos(\varphi)$ , а коэффициент неравномерности  $k = 0,155$ .

4. Вычисляются углы  $\varphi_{31}$  и  $\varphi_{32}$  поворота сателлита относительно соответствующего центрального колеса для множества положений центра сателлита на траектории, заданной уравнением (7) или (8):

$$\varphi_{31(32)} = \left( 1 \pm \frac{Z_{1(2)}}{Z_3} \right) \xi_{1(2)} \times \times \frac{1}{r_0} \int_0^\varphi \sqrt{\left( r_1(\varphi_{1(2)})^2 + r_1'(\varphi_{1(2)})^2 \right)} d\varphi, \quad (9)$$

где  $r_1'(\varphi_{1(2)})$  – производная соответствующей функции  $r_1\varphi_1$  или  $r_2\varphi_2$ ;  $\xi_{1(2)}$  – коэффициент, учитывающий изменение длины центральной траектории по сравнению с длиной центральной окружности исходного круглозвенного механизма:

$$\xi_{1(2)} = \frac{2\pi r_0}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\left( r_1(\varphi_{1(2)})^2 + r_1'(\varphi_{1(2)})^2 \right)} d\varphi}. \quad (10)$$

В примере  $\xi_1 = 0,9776$ ;  $\xi_2 = 0,9520$ . Такие значения коэффициентов обеспечивают выполнение условия целочисленности количества зубьев центральных колес.

5. Массивы параметров  $r_1(\varphi_1)$  и  $\varphi_{31}(\varphi_1)$  сохраняются для последующего построения профиля солнечной шестерни, а величина радиуса  $r_2(\varphi_2)$  уточняется с учетом разности  $\Delta\varphi_3$  угловых положений  $\varphi_{32}(\varphi_2)$  и  $\varphi_{31}(\varphi_1)$  сателлита, рассчитанных по формуле (9) для эпицикла и солнечной шестерни. По величине  $\Delta\varphi_c$  вычисляется разность положений мнимого водила  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_3 / i_{3h}, \quad (11)$$

где  $i_{3h}$  – мгновенное передаточное отношение от сателлита к мнимому водилу,

$$i_{3h} = \left( 1 + \frac{z_1}{z_3} \right) \cdot 0,5(\xi_1 + \xi_2) \times \times \frac{1}{r_0} \sqrt{\left( r_1(\varphi_1)^2 + r_1'(\varphi_1)^2 \right)}. \quad (12)$$

Итоговая формула для расчета уточненной величины радиуса  $r_2^{\text{nev}}(\varphi_2)$ :

$$r_2^{\text{nev}}(\varphi_2) = r_2(\varphi_2) + 2r_0k \times \times \left[ F\left( (M_{\varphi_1}) + \Delta\varphi NM / (N + M) \right) - F(M_{\varphi_1}) \right]. \quad (13)$$

Результатом предложенной корректировки величины радиуса  $r_2(\varphi_2)$  является получение контура зубчатого венца эпицикла, соответствующего необходимому варьированию угловой скорости мнимого водила.

6. На заключительном этапе проектирования некруглых колес механизма планетарно-роторной гидромашины применяются графические компьютерные программы. Сателлит строится во множестве положений, а профиль соответствующего некруглого зубчатого венца находится как огибающая семейства кривых – профилей сателлита.

В процессе графического синтеза механизма создается возможность для контроля показателей качества зацеплений сателлита с солнечной шестерней и эпициклом во всех фазах движения. В частности, обязательной является проверка фактического наличия торцового перекрытия. Моменты пересопределения зубьев определяются по удалению контура сателлита от огибающей семейства его контуров. Поводом для коррекции параметров механизма может стать также выраженная интерференция вершин зубьев эпицикла на участках со значительной вогнутостью.

### Выводы

1. Выполненный анализ структурно-кинематических особенностей трехзвенных центроидных механизмов позволил найти подход к корректному решению задачи проектирования рабочего механизма планетарно-роторной гидромашины путем введением поправки на величину радиус-вектора центроиды эпицикла, которая рассчитывается по авторской методике.

2. Разработанный расчетно-графический метод синтеза некруглых зубчатых колес планетарного механизма с плавающими сателлитами обеспечивает отсутствие интерференции зубьев и благоприятные условия передачи движения.

3. Предложенный метод достаточно прост и может быть использован широким кругом инженеров-расчетчиков с применением отечественных программных комплексов.

### Библиографические ссылки

1. *Mundo D.* (2006) Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears. *Mechanism and Machine Theory*, no. 41, pp. 456-472.
2. *Chao Lin, Xiguang Xia and Peilu Li* (2018) Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 12, pp. 1-12.

3. Ding H. (2012) Application of non-circular planetary Gear mechanism in the Gear Pump. *Adv Mater Res*, 591-593, 2139-2142.
4. Biao Zhang, Shikuan Song, Chenghu Jing and Dong Xiang (2021) Displacement prediction and optimization of a non-circular planetary gear hydraulic motor. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 11, pp. 1-13.
5. Dawei Li, Yongping Liu, Jun Gong, Tongcheng Wang (2021) Design of a Noncircular Planetary Gear Mechanism for Hydraulic Motor. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, vol. 2021, pp 1-9.
6. Ан И-Кан, Беляев А. Е. Синтез планетарных передач применительно к роторным гидромашинам. Новоуральск : НПИ, 2001. 91 с.
7. Ан И-Кан. Аппроксимация профилей зубьев некруглых колес с применением ПК // Справочник. Инженерный журнал. 2000. № 11. С. 39–41.
8. Ан И-Кан. Синтез центроид планетарной передачи с некруглыми колесами // Механика и машиностроение : сборник трудов ТПУ. Томск : ТПУ, 2000. С. 288–290.
9. Волков Г. Ю., Курасов Д. А., Горбунов М. В. Инженерный метод геометрического синтеза планетарного механизма роторной гидромашин // Вестник машиностроения. 2017. № 10. С. 10–15.
10. Волков Г. Ю., Смирнов В. В., Горбунов М. В. Методика геометрического расчета и профилирования зубчатых венцов планетарной роторной гидромашин // Справочник. Инженерный журнал. 2018. № 9 (258). С. 32–37.
11. Gleb Volkov, Denis Fadyushin, Maksim Vedernikov (2023) Geometric calculation of non-circular gear segments of the planetary mechanism in rotary hydraulic machines: E3S Web of Conferences 389, 01017 (2023). Available at: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901017> (accessed: 20.06.2024).
12. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. М. : Физматгиз, 1959. 1084 с.
13. Kumar Mallik, Ghosh A., Dittirich G. (1994) Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms; CRC: Boca Raton, FL, USA, 1994.
14. Диментберг Ф. М. Теория пространственных шарнирных механизмов. М. : Наука, 1982. 335 с.
15. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М. : Наука, 1968. 584 с.
16. Куреев С. О., Падалко Н. А. Численное определение координат контура эвольвентного зуба. Расчет параметров зубьев для изготовления овальных шестерен // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2000. № 3. С. 34–36.
17. Shinn-Liang, Chung-BiauTsay, Long-Long Wu (1996) Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters. *Mech. Math. Theory*, vol. 31, no. 7, pp. 879-890.
18. Mundo D., Danieli G.A. (2004) Use of the Non-Circular Gear in Pressing Machine Driving Systems. *IASME Transactions I*, no. 1, pp. 7-11.
19. Jian Gang Li, Xu Tang Wu, Shi Min Mao (2007) Numerical computing method of noncircular gear tooth profiles generated by shaper cutters. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 33, is. 11-12, pp. 1098-1105.
20. Волков Г. Ю., Фадюшин Д. В., Голованев В. А. Профилирование некруглых зубчатых колес для передач с фиксированным межосевым расстоянием по методу виртуальной обкатки // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2022. Т. 23, № 10. С. 452–458. DOI: 10.36652/0202-3350-2022-23-10-452-458
21. Падалко А. П., Падалко Н. А. Зубчатая передача с некруглым колесом // Теория механизмов и машин. 2013. Т. 11, № 2. С. 89–96.
22. Волков Г. Ю., Алексеева Ю. В. Особенности задачи синтеза некруглых зубчатых колес планетарных механизмов с плавающими сателлитами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2024, № 9 (774). С. 10–18.

## References

1. Mundo D. (2006) Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears. *Mechanism and Machine Theory*, no. 41, pp. 456-472
2. Chao Lin, Xiguang Xia and Peilu Li (2018) Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 12, pp. 1-12.
3. Ding H. (2012) Application of non-circular planetary Gear mechanism in the Gear Pump. *Adv Mater Res*, 591-593, 2139-2142.
4. Biao Zhang, Shikuan Song, Chenghu Jing and Dong Xiang (2021) Displacement prediction and optimization of a non-circular planetary gear hydraulic motor. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 11, pp. 1-13.
5. Dawei Li, Yongping Liu, Jun Gong, Tongcheng Wang (2021) Design of a Noncircular Planetary Gear Mechanism for Hydraulic Motor. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, vol. 2021, pp 1-9.
6. An I-Kan, Belyaev A.E. (2001) [Synthesis of planetary gears applied to rotary hydraulic machines]. Novoural'sk : Novoural'skij politechnicheskij institut, 2001, 91 p. (in Russ.).
7. An I-Kan (2000) [Approximation of tooth profiles of non-circular gears using a PC]. *Spravochnik. Inzhenernyj zhurnal*, no. 11, pp. 39-41 (in Russ.).
8. An I-Kan (2000) [Synthesis of the centroid of a planetary gear with non-circular wheels]. *Mehanika I mashinostroenie : sbornik trudov TPU*. Tomsk: TPU, pp. 288-290 (in Russ.).
9. Volkov G.Yu., Kurasov D.A., Gorbunov M.V. (2017) [Engineering method of geometric synthesis of the planetary mechanism of a rotary hydraulic machine]. *Vestnik mashinostroenija*, no. 10, pp. 10-15 (in Russ.).
10. Volkov G.Yu., Smirnov V.V., Gorbunov M.V. (2018) [Methodology of geometric calculation and profiling of gear rims of planetary rotary hydraulic machine]. *Spravochnik. Inzhenernyj zhurnal*, no. 9, pp. 32-37 (in Russ.).
11. Gleb Volkov, Denis Fadyushin, Maksim Vedernikov (2023) Geometric calculation of non-circular gear segments of the planetary mechanism in rotary hydraulic machines: E3S Web of Conferences 389, 01017 (2023).



Available at: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901017> (accessed: 20.06.2024).

12. Artobolevsky I.I., Levitsky N.I., Cherkudinov S.A. (1959) [Synthesis of flat mechanisms]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1084 p. (in Russ.).

13. Kumar Mallik, Ghosh A., Dittirich G. (1994) Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms; CRC: Boca Raton, FL, USA, 1994.

14. Dimentberg F.M. (1982) [Theory of spatial hinge mechanisms]. Moscow: Nauka Publ., 335 p. (in Russ.).

15. Litvin F.L. (1968) [Theory of gearing]. Moscow: Nauka Publ., 584 p. (in Russ.).

16. Kireev S.O., Padalko N.A. (2000) [Numerical determination of coordinates of the contour of an involute tooth. Calculation of tooth parameters for the manufacture of oval gears]. *Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Tehnicheskie nauki*, no. 3, pp. 34-36 (in Russ.).

17. Shinn-Liang, Chung-Biau Tsay, Long-Long Wu (1996) Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters. *Mech. Math. Theory*, vol. 31, no. 7, pp. 879-890.

18. Mundo D., Danieli G.A. (2004) Use of the Non-Circular Gear in Pressing Machine Driving Systems. *IASME Transactions I*, no. 1, pp. 7-11.

19. Jian Gang Li, Xu Tang Wu, Shi Min Mao (2007) Numerical computing method of noncircular gear tooth profiles generated by shaper cutters. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 33, is. 11-12, pp. 1098-1105.

20. Volkov G.Yu., Fadyushin D.V., Golovanov V.A. (2022) [Profiling of non-circular gears for fixed-center distance transmissions using the virtual running in method]. *Sbornik v mashinostroenii, priborostroenii*, vol. 23, no. 10, pp. 452-458 (in Russ.). DOI: 10.36652/0202-3350-2022-23-10-452-458

21. Padalko A.N., Padalko N.A. (2013) [Gear transmission with non-circular wheel]. *Teorija mehanizmov i mashin*, vol. 11, no. 2, pp. 89-96 (in Russ.).

22. Volkov G.Yu., Alekseeva Yu.V. (2024) [Problem features in synthesizing the non-circular gearwheels for a planetary train with the floating pinion]. *Izvestija vuzov. Mashinostroenie*, no. 9, pp. 10-18 (in Russ.).

### Structural and Kinematic Features of Three-Link Centroid Mechanisms and Synthesis of Non-Circular Gears of a Planetary-Rotor Hydraulic Machine

G.Yu. Volkov, DSc in Engineering, Associate Professor, Kurgan State University, Kurgan, Russia

Yu.V. Alekseeva, Kurgan Industrial College, Kurgan, Russia

*The development of modern technologies opens up new possibilities for the production and use of centroid mechanisms, including planetary-rotary hydraulic machines. The problem of profiling non-circular gears of such hydraulic machines has not yet received its final solution. Previously developed methods either did not provide an acceptable tooth shape or required increased clearances in the gearings. In this article, the problem of the mentioned above hydraulic machine design is solved on the basis of analysis of the three-link centroid mechanism structure general principles. Features of centroid mechanism design having round and non-circular gears are studied. The importance of the Aronhold-Kennedy and Willis theorems in the geometric synthesis of such mechanisms is emphasized. In relation to the synthesis of non-circular gears for a planetary mechanism with planetary gears, it was established that in this mechanism the transition motion of the satellites cannot be carried out at a constant angular velocity. An in-depth analysis of the issue made it possible to develop a more accurate method for designing the working mechanism of planetary-rotary hydraulic machines. This method includes the following stages: choosing the parameters of the designed working mechanism prototype of the hydraulic machine - the original, calculated round-link planetary mechanism; choosing the calculated trajectories of the satellite center in coordinate systems connected with each of the central gears, which are described by a common cyclic function; calculating the angular positions of the satellite corresponding to various phases of its motion; calculating the correction for the satellite radial position, which specifies the profile of the epicycle teeth; graphical construction of non-circular gear profiles as envelopes of the generating satellite. The new method ensures the absence of tooth interference and favorable conditions for transmitting motion in gearings. The method is quite simple and can be used by a wide range of calculation engineers based on national software systems.*

**Keywords:** planetary-rotor hydraulic machine, planetary gears, non-circular gears, centroidal mechanism, the Aronhold-Kennedy theorem.

Получено 08.08.2024

#### Образец цитирования

Волков Г. Ю., Алексеева Ю. В. Структурно-кинематические особенности трехзвенных центроидных механизмов и синтез некруглых зубчатых колес планетарно-роторной гидромашин // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2024. Т. 27, № 4. С. 22–30. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-4-22-30

#### For Citation

Volkov G.Yu., Alekseeva Yu.V. (2024) [Structural and Kinematic Features of Three-Link Centroid Mechanisms and Synthesis of Non-Circular Gears of a Planetary-Rotor Hydraulic Machine]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, vol. 27, no. 4, pp. 22-30 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2024-4-22-30