

УДК 621.833.38

DOI: 10.22213/2413-1172-2025-4-36-45

## Прямозубая коническая передача с зубьями, образованными дисковым инструментом по схеме копирования

Е. С. Трубачев, доктор технических наук, профессор, Институт механики имени профессора Гольдфарба В. И. ИжГТУ имени М. Т. Калашникова; ООО «Малое инновационное предприятие «Механик», Ижевск, Россия

Рассмотрена разновидность конической зубчатой передачи с прямыми зубьями, образованными методом копирования дисковым инструментом (фрезой или шлифовальным кругом). Зубонарезание колес такой передачи может производиться на распространенном неспециализированном оборудовании. Предложена методика проектирования, включающая выбор схемы передачи, параметров нарезания шестерни, расчет геометрии сопряженного колеса, расчет сопряженного зацепления, выбор параметров нарезания колеса и оценку локализованного контакта. Охарактеризованы особенности передачи, в частности: приближенность зацепления и, соответственно, необходимость минимизации погрешности нераспределения зубьев, различие аксоидов и начальных поверхностей, необходимость специального выбора угла понижения зубьев и смещения шестерни. Даны методики выбора параметров нарезания зубьев передачи, при котором необходимо обеспечить касание производящей поверхности и траектории ее подачи с поверхностью впадин шестерни и отсчетной поверхностью колеса. На двух расчетных примерах показана теоретическая возможность обеспечения 7-й и 4-й степени точности по плавности работы.

**Ключевые слова:** конические зубчатые колеса, нарезание зубьев, проектирование зубчатых передач.

### 1. Введение

Коническую передачу с прямыми зубьями следует считать достаточно хорошо изученным объектом проектирования и производства. Традиционно зубья в ней образуются с помощью плоского производящего колеса, которое реализуется при вращении люльки станка, несущей совершающие возвратно-поступательное движение строгальные резцы, дисковые фрезы или шлифовальные круги. Из этого следует, что для производства прямозубой передачи требуются специальные станки, что доставляет сложности потенциальному производителю. В значительной мере это обуславливает стремление специалистов предложить альтернативные способы изготовления прямых зубьев и соответствующие им методики геометрического расчета

передач [1–3]. В настоящей статье рассматривается один из таких альтернативных вариантов – образование прямых зубьев конического колеса без движения обката (то есть копированием) дискового инструмента (рис. 1). Предполагается, что эта идея настолько проста и лежит на поверхности, что едва ли ее можно назвать новой, однако работ, в которых рассматриваются передачи, нарезанные таким образом, практически нет.

Цель настоящей статьи – восполнить этот пробел, дав более или менее общее представление об этой разновидности передачи и основных приемах ее проектирования. Изложение материала нацелено на автоматизированное проектирование передач [4–6], ставшее нормой для всех ответственных случаев их применения.

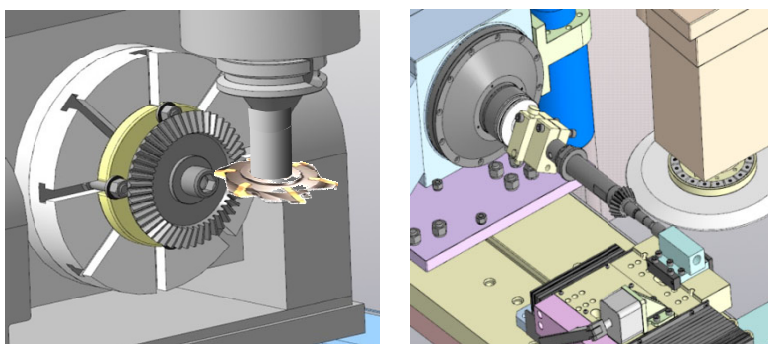


Рис. 1. Нарезание прямых зубьев дисковыми инструментами на вертикальном обрабатывающем центре (слева) и зубошлифовальном станке

Fig. 1. Cutting straight tooth with disc tool on a vertical machining center (left) and a tooth grinding machine

### 2. Общая последовательность расчета передачи

Рассматриваемая передача проектируется как приближенная, работающая с небольшой погрешностью зубцовой частоты. Получение допустимой ве-

личины этой погрешности составляет одну из главных задач проектирования. Последовательность автоматизированного проектирования может быть следующей:

- I. Выбор схемы передачи.
  - II. Выбор и расчет параметров нарезания и геометрии зубьев шестерни.
  - III. Расчет геометрии сопряженных (отсчетных) поверхностей зубьев колеса
  - IV. Расчет виртуальной сопряженной передачи.
  - V. Выбор и расчет параметров нарезания и геометрии модифицированных поверхностей зубьев колеса; оценка локализованного контакта в передаче.
- Представленная последовательность наследует декомпозицию процесса автоматизированного проектирования передачи червячного типа, предложенную профессором В. И. Гольдфарбом [7], а также соответствует подходу к выбору станочных наладок, предложенному профессором М. Г. Сегалем для конических и гипоидных передач с круговыми зубьями [8].

### 3. Общие замечания

#### *О профилях зубьев*

В традиционной конической передаче при прямолинейном профиле зуба производящего колеса профили зубьев шестерни и колеса оказываются естественным образом выпуклыми. В рассматриваемом случае имеется альтернатива: сделать также выпуклыми зубья обоих звеньев или одно из звеньев обработать прямобочным инструментом (например, дисковой фрезой с типовыми твердосплавными пластинами), а профилям зубьев другого звена придать увеличенную кривизну (уменьшенный радиус кривизны). Для уменьшения опасности поднутрения и подрезания зубьев в качестве звена с прямым профилем зуба предпочтительно выбирать большее звено передачи – колесо.

#### *О траектории подачи инструмента*

Она может быть прямолинейной для одного из звеньев и криволинейной (например, круговой) для другого звена или для обоих звеньев. Это необходимо для продольной локализации контакта.

#### *О начальных конусах*

В стандартной конической передаче начальные конусы совпадают с аксоидами, они перекатываются друг по другу без скольжения по всей длине линии их касания. В рассматриваемой передаче для обеспечения лучших свойств локализованного контакта предлагается делать разницу между этими поверхностями (рис. 2). При этом качение без скольжения будет лишь в одной точке –  $M_{wm}$  на рисунке 2.

#### *О смещении*

Предлагаемая передача, в отличие от традиционной, не имеет общего производящего элемента (рейки или производящего колеса), поэтому смещение задается для одного из звеньев передачи – шестерни. При неизменном межосевом угле увеличение коэффициента смещения  $X_1$  приводит к приближению начальной линии к вершинам зубьев шестерни (см. рис. 2, а).

#### *Об осевой форме зуба*

В стандартной прямозубой конической передаче применяется осевая форма зуба  $I$  – пропорционально понижающийся зуб. В рассматриваемой передаче

понижение высоты зубьев по длине зуба выбирается в зависимости от требуемого направления подачи инструмента для зубьев колеса. Варьирование степени понижения есть часть процесса проектирования рассматриваемой передачи, поэтому введем угол  $\delta_a$  понижения зуба:  $\delta_a = \delta_{a1,2} - \delta_{w1,2}$ , где  $\delta_{a1,2}$ ,  $\delta_{w1,2}$  – соответственно, углы конуса вершин и начального конуса (здесь и далее нижние символы 1 и 2 означают отношение параметра к шестерне или колесу соответственно, а сочетание 1 и 2 – и к шестерне, и к колесу).

### 4. Расчет схемы передачи

Параметры схемы выбираются в следующей последовательности (рис. 2):

- а) Выбор межосевого угла  $\Sigma$ , передаточного отношения  $i$  (частот вращения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  или чисел  $z_{(1)}$  и  $z_{(2)}$  зубьев шестерни и колеса соответственно); расчет углов  $\delta_{ax1}$  и  $\delta_{ax2}$  аксоидов (учитывая, что  $\delta_{ax1} + \delta_{ax2} = \Sigma$  и  $i = \sin \delta_{ax2} / \sin \delta_{ax1}$ ).
- б) Выбор углов  $\delta_{w1}$  и  $\delta_{w2}$  ( $\delta_{w1} + \delta_{w2} = \Sigma$ ), при этом углы  $\delta_{ax1}$  и  $\delta_{ax2}$  являются отсчетными, различие между этими парами углов не более 2...7 град.
- с) Выбор внешнего начального диаметра  $d_{we2}$  колеса.
- д) Выбор ширины венца; расчет соответствующих начальных диаметров  $d_{wm2}$ ,  $d_{wm1}$ ,  $d_{wi2}$ ,  $d_{wi1}$ ,  $d_{we1}$  и среднего окружного модуля  $m_{im} = d_{wm1,2} / z_{(1,2)}$ .
- е) Выбор угла  $\delta_a$ ; для первого приближения можно выбрать  $\delta_{a1} = \arctg(2h_a^* m_{im} \sin \delta_{ax1} / d_{wi1})$  ( $h_a^*$  – коэффициент высоты головки зуба, обычно  $h_a^* = 1$ ), соответствующий стандартной форме  $I$ ; расчет соответствующих диаметров вершин колеса и шестерни  $d_{ai1}$ ,  $d_{ae2}$ ,  $d_{ae1}$ .

### 5. Выбор и расчет параметров нарезания зубьев шестерни

Предполагается, что обработка разноименных боковых поверхностей и шестерни, и колеса производится за один рабочий ход дискового инструмента, ось которого перпендикулярна оси нарезаемого колеса. Параметры геометрии, установки и движения инструмента показаны на рисунке 3 (они изображены для шестерни, для колеса единственное расчетное отличие состоит в направлении оси и, соответственно, в знаке координат точек  $O_0$  и  $O_j$ ):

- наружный диаметр  $d_{a0}$ ;
- делительная толщина  $s_0$ ;
- делительные углы  $\alpha_{0R,L}$  профиля;
- делительные радиусы  $\rho_{0R,L}$  профиля;
- угол  $\delta_{j0}$  подачи по отношению к оси колеса в расчетном сечении зуба;
- радиус  $\rho_{j0}$  траектории подачи;
- пределы круговой подачи  $\psi_{min} \dots \psi_{max}$ .

\*Здесь и далее нижние символы  $R$  и  $L$  указывают на отношение параметра к зацеплению или формообразованию правой и левой поверхностей зубьев.

В выборе параметров нарезания шестерни, являющейся исходным звеном (п. 2), проявляется большая свобода. По сути, траекторию ее подачи

следует направить вдоль или почти вдоль образующей конуса впадин, то есть принять  $\delta_l = \delta_{w1} + \delta_a$  или  $\delta_l \approx \delta_{w1} + \delta_a$ . Для первого приближения в выборе параметров профиля инструмента можно предложить следующие простые соображения:

- $s_{01} = 0,5\pi m_{tm}$  или несколько больше – с учетом того, что длина дуги, вдоль которой оценивается модуль, несколько больше длины хорды;
- $\alpha_{01R,L} = 20^\circ + 90^\circ / z_{(1)}$ ;
- $\rho_{01R,L} = 5m_{tm}$ .

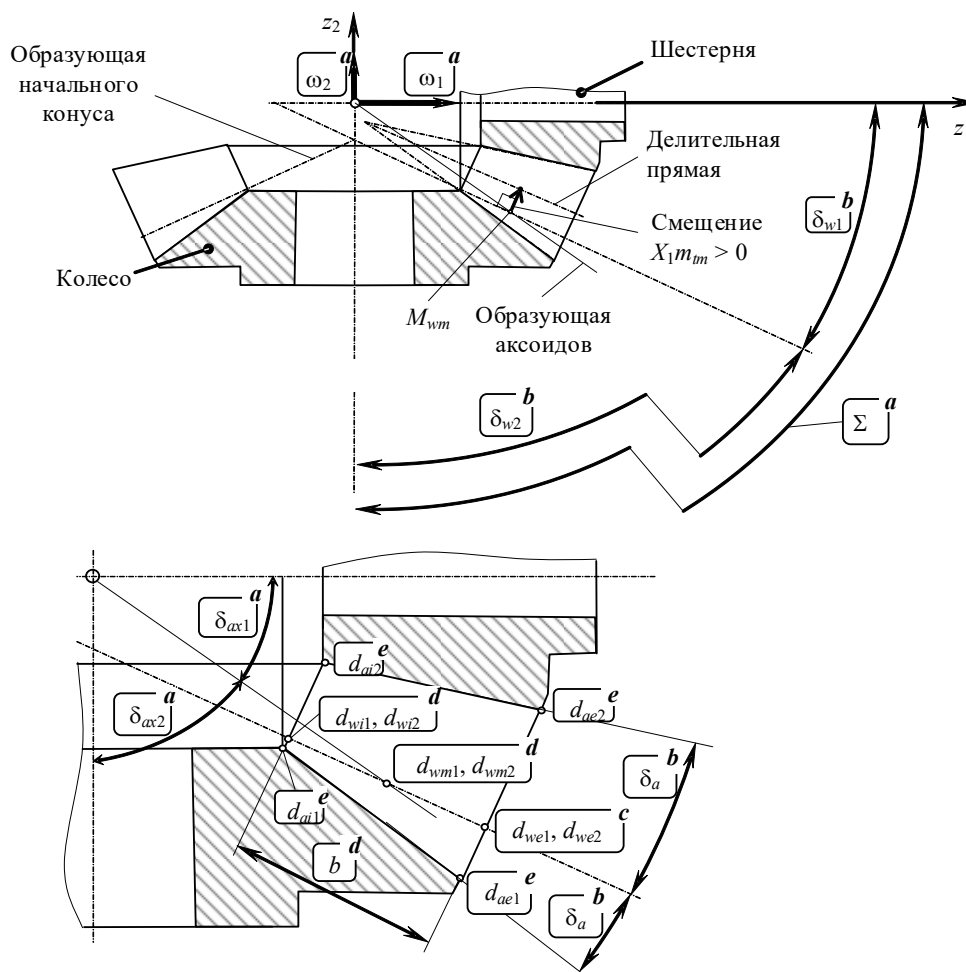


Рис. 2. Схема рассматриваемой конической передачи

Fig. 2. The scheme of the considered bevel gear

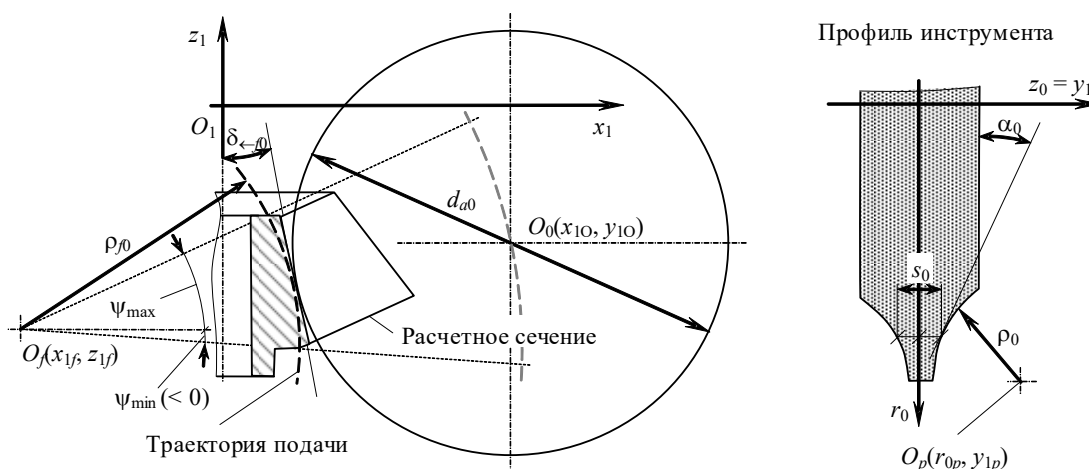


Рис. 3. Параметры нарезания зуба (параметры станочной наладки)

Fig. 3. Parameters of tooth cutting (parameters of machine-tool set)

Для построений на рисунке 3 предполагаем, что плоскость  $x_1O_1z_1$  делит пополам впадину между зубьями на делительной высоте, а ось  $y_1$  (не показана на рис. 3), образуя правую систему, направлена от наблюдателя. Координаты центра круговой траектории инструмента:

$$x_{1f} = 0,5d_{wm1} - (X_1 + h_f^*)m_{tm} \cos \delta_{m1} - \rho_{f01} \cos \delta_{f1}; \quad (1)$$

$$z_{1f} = \frac{0,5d_{wm1}}{\operatorname{tg} \delta_{ax1}} + (X_1 + h_f^*)m_{tm} \sin \delta_{m1} - \rho_{f01} \sin \delta_{f1}. \quad (2)$$

Пределы круговой подачи:

$$\psi_{\min/\max} = \delta_{f1} \mp \arctg \left( \frac{b}{\rho_{f01} \cos(\delta_{f1} - \delta_{w1})} \right). \quad (3)$$

Координаты оси инструмента в текущем положении, т. е. при произвольном  $\psi = \psi_{\min} \dots \psi_{\max}$  (на рис. 3 показано положение инструмента при  $\psi = \delta_{f1}$ , т. е. при формировании точки впадины в расчетном среднем сечении зуба):

$$\begin{aligned} x_{1O} &= x_{1f} + (\rho_{f01} + 0,5d_{a01}) \cos \psi; \\ z_{1O} &= z_{1f} + (\rho_{f01} + 0,5d_{a01}) \sin \psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Координаты центра кругового профиля инструмента:

$$\begin{aligned} r_{0cR,L} &= 0,5d_0 - h_f^*m_{tm} + \rho_{01R,L} \sin \alpha_{01R,L}, \\ y_{1cR,L} &= \pm (0,5s_{01} + \rho_{01R,L} \cos \alpha_{01R,L}). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее верхний знак для формообразования левой боковой поверхности, нижний – для правой.

## 6. Расчет геометрии зубьев шестерни

Уравнение торовой производящей поверхности в системе  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ :

$$(x_1 - x_{1O})^2 + (z_1 - z_{1O})^2 - r_0^2(y_1) = 0; \quad (6)$$

$$r_0(y_1) = r_{0cR,L} \pm \sqrt{\rho_{01R,L}^2 - (y_1 - y_{1cR,L})^2}. \quad (7)$$

Проекция нормали  $\mathbf{n}$  к (6):

$$\begin{aligned} n_{x1} &= x_1 - x_{1O}; \\ n_{y1} &= \mp r_0(y_1) \frac{y_1 - y_{1cR,L}}{\sqrt{\rho_{01R,L}^2 - (y_1 - y_{1cR,L})^2}}; \\ n_{z1} &= z_1 - z_{1O}. \end{aligned} \quad (8)$$

Проекция вектора  $\mathbf{v}_f$  скорости подачи:

$$v_{fx1} = -(z_1 - z_{1f}); \quad v_{fy1} = 0; \quad v_{fz1} = x_1 - x_{1f}. \quad (9)$$

Касание производящей и формируемой поверхностей происходит в точках, где выполняется кинематическое условие (опуская простые преобразования):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_f &= (x_1 - x_{1f})(z_{1O} - z_{1f}) - \\ &- (z_1 - z_{1f})(x_{1O} - x_{1f}) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которое, как видно, дает уравнение прямой, соединяющей точки  $O_f$  и  $O_0$  (рис. 3). Следовательно, во-первых, линия касания совпадает с осевым профилем инструмента, во-вторых, координаты точек формируемой поверхности можно получать при  $\psi_k = \psi_{\min} \dots \psi_{\max}$  и  $r_{0m} = r_{0\min} \dots 0,5d_{a0}$ , где  $r_{0\min} = 0,5d_{a0} - 2h_f^*m_{tm} - (d_{we2} - d_{wm2})/\sin \delta_{w1} \operatorname{tg} \delta_a$  – оцененный с небольшим запасом минимальный профилирующий радиус инструмента.

Тогда набор точек искомой поверхности:

$$x_{1km} = x_{1f} + (\rho_{f01} + 0,5d_{a01} - r_{0m}) \cos \psi_k; \quad (11)$$

$$y_{1m} = y_{1cR,L} \mp \sqrt{\rho_{01R,L}^2 - (r_{0m} - r_{0cR,L})^2}; \quad (12)$$

$$z_{1km} = z_{1f} + (\rho_{f01} + 0,5d_{a01} - r_{0m}) \sin \psi_k; \quad (13)$$

$$r_{1km} = \sqrt{x_{1km}^2 + y_{1m}^2}; \quad (14)$$

$$\vartheta_{1km} = \arctg(y_{1m} / x_{1km}). \quad (15)$$

Во многих задачах расчета и контроля зубьев поверхность удобно представить в виде регулярной (равномерной) сетки точек [9], привязанной к границам зуба. Пример такой сетки для рассматриваемого случая показан на рисунке 4.

Преобразования координат  $r_1, z_1 \leftrightarrow l, h$ :

$$l = -(z_1 - z_{1Ohl}) \cos \delta_{w1} + (r_1 - r_{1Ohl}) \sin \delta_{w1}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} h &= (z_1 - z_{1Ohl}) \sin \delta_{w1} + \\ &+ (r_1 - r_{1Ohl}) \cos \delta_{w1} / \left( 1 + \frac{l}{h_a^*} \operatorname{tg} \delta_a \right); \end{aligned} \quad (17)$$

$$z_1 = z_{1Ohl} + h \left( 1 + \frac{l}{h_a^*} \operatorname{tg} \delta_a \right) \sin \delta_{w1} - l \cos \delta_{w1}; \quad (18)$$

$$r_1 = r_{1Ohl} + h \left( 1 + \frac{l}{h_a^*} \operatorname{tg} \delta_a \right) \cos \delta_{w1} + l \sin \delta_{w1}, \quad (19)$$

где координаты центральной точки боковой поверхности зуба:

$$r_{1Ohl} = 0,5d_{wm1} - X_1 m_{tm} \cos \delta_{w1}; \quad (20)$$

$$z_{1Ohl} = 0,5d_{wm1} \operatorname{ctg} \delta_{ax1} + X_1 m_{tm} \sin \delta_{w1}. \quad (21)$$

После преобразований (16), (17) набора  $km$ -х точек получим нерегулярную сетку из этих точек в координатах  $h, l$ . Точки узлов сетки с равномерным изменением координат  $h, l$  в пределах  $h = -h_a^*m_{tm} \dots + h_a^*m_{tm}$  и  $l = 0 \dots b$  можно найти с помощью подходящего вида интерполяции  $\theta_1 = \theta_1(h, l)$ . Далее будем полагать, что поверхности зубьев и шестерни, и ко-

леса найдены в виде сеток с регулярным изменением параметров  $h, l$ , то есть в виде наборов  $h_i, l_j, \theta_{1ij}$ .

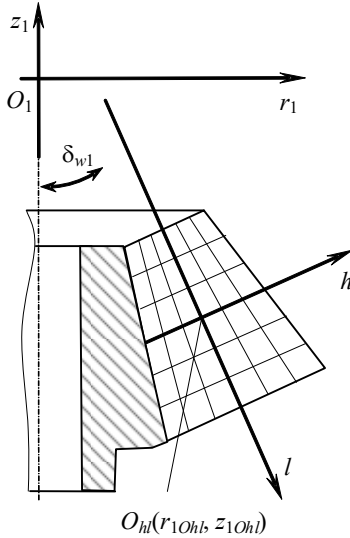


Рис. 4. Регулярная сетка точек зуба

Fig. 4. Regular grid of tooth points

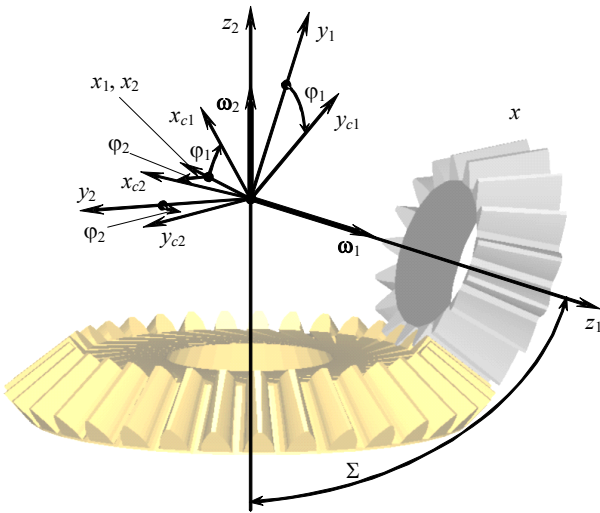


Рис. 5. Системы координат звеньев

Fig. 5. Coordinate systems of links

## 7. Расчет сопряженных поверхностей колеса

Неподвижные и вращающиеся совместно (жестко связанные) со звеньями передачи системы координат, применяемые в расчете, показаны на рисунке 5.

Имея в виду (16), (17), запишем уравнение семейства поверхностей зуба, образующегося при вращении шестерни вокруг своей оси:

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta(h(r_1, z_1), l(r_1, z_1)) + \varphi_1, \\ y_1 = r_1 \sin \theta(h(r_1, z_1), l(r_1, z_1)) + \varphi_1, \\ z_1. \end{cases} \quad (22)$$

Нормаль к поверхности (22) через производные  $\mathbf{r}_{r1}, \mathbf{r}_{z1}$  радиус-вектора:

$$\mathbf{n}_1(r_1, z_1, \varphi_1) = \mathbf{r}_{r1} \times \mathbf{r}_{z1}. \quad (23)$$

При вращении шестерни для каждой  $ij$ -й точки зуба неизменными остаются векторы-компоненты  $\mathbf{n}_1$ : радиальный ( $\mathbf{r}_r = \{x_1/r_1, y_1/r_1, 0\}$ ), тангенциальный ( $\mathbf{t} = \{-y_1/r_1, x_1/r_1, 0\}$ ) и осевой ( $\mathbf{k}_1 = \{0, 0, 1\}$ ).

$$\mathbf{n}_{1z} = n_{1z1} \mathbf{k}_1; \quad \mathbf{n}_{1t} = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}; \quad \mathbf{n}_{1r} = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_r) \mathbf{r}_r; \quad (24)$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1t} + \mathbf{n}_{1r} + \mathbf{n}_{1z} : \begin{cases} n_{1x1} = (-y_1 n_{1t} + x_1 n_{1r}) / r_1, \\ n_{1y1} = (x_1 n_{1t} + y_1 n_{1r}) / r_1, \\ n_{1z1}. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда уравнения зацепления шестерни и колеса

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \mathbf{v}_{12} = f_{312}(x_1, y_1, z_1, r_1) = 0, \\ x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \end{cases} \quad (26)$$

где скорость скольжения в зацеплении  $\mathbf{v}_{12}$  [10, 11]

$$\mathbf{v}_{12} : \begin{cases} v_{12x} = -y_1 - (z_1 \sin \Sigma - y_1 \cos \Sigma) / i, \\ v_{12y} = x_1 (1 - x_1 \cos \Sigma / i), \\ v_{12z} = x_1 \sin \Sigma / i. \end{cases} \quad (27)$$

Система (26) сводится [9] к квадратному уравнению для каждой  $ij$ -й точки, решение которого дает координаты  $x_{1ij}, y_{1ij}$  точек сопряженного контакта шестерни и колеса в неподвижной системе координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и – после простых преобразований – точек сопряженной поверхности зуба колеса в системе координат  $S_{2c}(x_{2c}, y_{2c}, z_{2c})$ , жестко связанной с вращающимся колесом:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 / i; \\ x_{2cij} &= x_1 \cos \cos \varphi_2 + \\ &+ (y_1 \cos \cos \Sigma - z_1 \sin \sin \Sigma) \sin \sin \varphi_2; \\ y_{2cij} &= -x_1 \sin \sin \varphi_2 + \\ &+ (y_1 \cos \cos \Sigma - z_1 \sin \sin \Sigma) \cos \cos \varphi_2; \\ z_{2cij} &= y_1 \sin \sin \Sigma + z_1 \cos \cos \Sigma; \\ r_{2cij} &= \sqrt{x_{2cij}^2 + y_{2cij}^2}; \\ \vartheta_{2cij} &= \arctg(y_{2cij} / x_{2cij}). \end{aligned} \quad (28)$$

Полученная таким образом сетка точек оказывается нерегулярной в параметрах  $h, l$ . Регулярную сетку можно найти с помощью уравнений и приемов, аналогичных описанным выше (уравнения (16)–(21)), применяя их для колеса.

Главными ограничениями при выборе параметров являются (рис. 6):

- заострение и поднутрение профиля инструмента для зубьев шестерни;
- заострение и поднутрение зуба шестерни;
- заострение сопряженного колеса, интерференция зубьев шестерни и колеса.

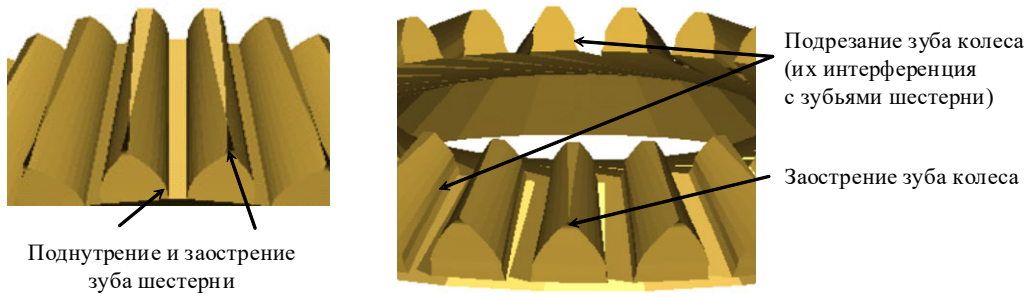


Рис. 6. Типовые дефекты зубьев

Fig. 6. Typical tooth defects

## 8. Расчет параметров нарезания колеса

При прямой форме зубьев длина и расположение линий контакта, радиусы кривизны, сила в зацеплении и КПД сопряженной передачи (этап проектирования IV, п. 2) рассматриваемой разновидности мало отличаются от соответствующих параметров традиционной прямозубой конической передачи. Их вычисление, как в инженерном, так и в автоматизированном расчете, не представляет методической сложности. Рассмотрим следующий, V, этап расчета – выбор параметров нарезания колеса. Его можно разделить на два подэтапа:

- собственно выбор и расчет параметров нарезания колеса;
- оценка локализованного контакта в передаче.

Считаем, что сопряженные боковые поверхности зубьев колеса найдены (этап III) в виде наборов  $h_i$ ,  $l_j$ ,  $\theta_{2ij}$ , для точек которых можно найти координаты  $x_{2cij}$ ,  $y_{2cij}$ ,  $z_{2cij}$  с помощью преобразований, аналогичных (16)–(21) (см. также рис. 4):

$$z_{2c} = z_{2cOhl} + h \left( 1 + \frac{l}{h_a^*} \operatorname{tg} \delta_a \right) \sin \delta_{w2} - l \cos \delta_{w2}; \quad (29)$$

$$r_{2c} = r_{2cOhl} + h \left( 1 + \frac{l}{h_a^*} \operatorname{tg} \delta_a \right) \cos \delta_{w2} + l \sin \delta_{w2}; \quad (30)$$

$$x_{2c} = r_{2c} \cos \vartheta_2; \quad (31)$$

$$y_{2c} = r_{2c} \sin \vartheta_2, \quad (32)$$

где

$$r_{2cOhl} = 0,5d_{wm2} + X_1 m_{tm} \cos \delta_{w2}; \quad (33)$$

$$z_{2cOhl} = 0,5d_{wm2} \operatorname{ctg} \delta_{ax2} - X_1 m_{tm} \sin \delta_{w2}. \quad (34)$$

Также будем полагать, что в точках  $x_{2cij}$ ,  $y_{2cij}$ ,  $z_{2cij}$  восстановлены нормали  $\mathbf{n}_{ij}$  к сопряженным поверхностям.

*Выбор и расчет параметров нарезания колеса*

Главным в этой части расчета является обеспечение касания производящей поверхности и ее траектории с касательной плоскостью к сопряженной поверхности в выбранной расчетной точке в центральной части зуба. Схематично расположение расчетных точек  $M_R$  и  $M_L$ , систем координат колеса  $S_c$  и инструмента  $S_{02}$  (ось  $z_{02}$  перпендикулярна оси  $z_c$ ) показано на рисунке 7, во многом аналогичном рисунку 3 для шестерни.

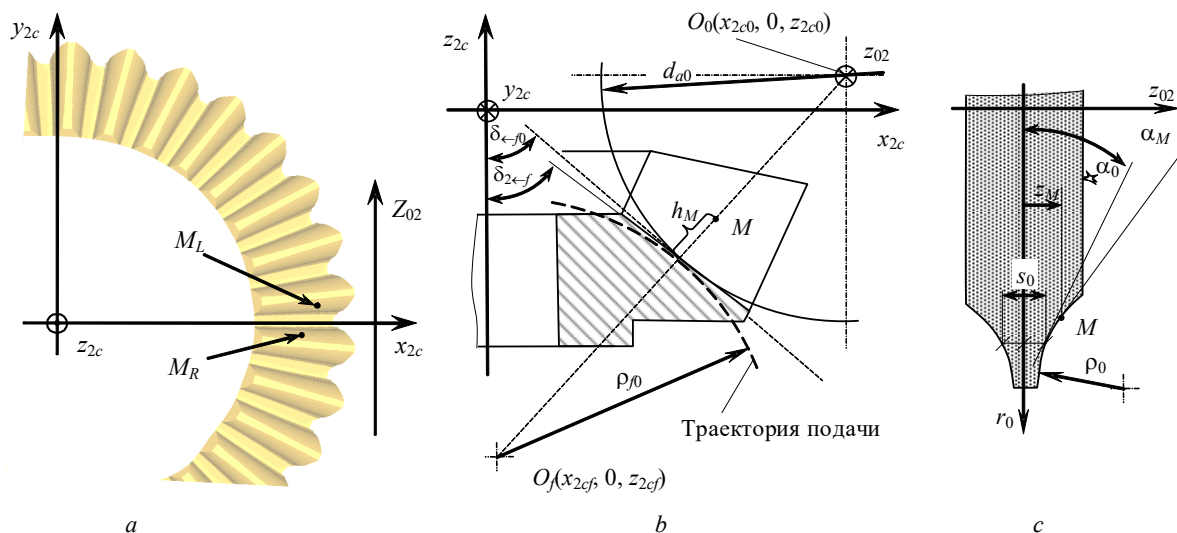


Рис. 7. К выбору и расчету параметров нарезания зубьев колеса: а – расчетные точки и системы координат; б – расчетное положение и траектория инструмента; в – профиль инструмента

Fig. 7. For choosing and calculating the parameters of toothing the gearwheel: а - calculated points and coordinate systems; б - calculated position and tool trajectory; в - tool profile



Подача инструмента осуществляется в средней плоскости впадины ( $y_{2c} = 0$ ), ее направление не может выбираться произвольно. Вектор  $\mathbf{f}$ , касательный к траектории, перпендикулярен двум векторам – орту оси ординат системы  $S_{2c}$  и нормали к сопряженной поверхности в расчетной точке. Соответственно:

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \times \mathbf{j}_{2c} \rightarrow \operatorname{tg} \delta_{f0} = -n_{z2c} / n_{x2c}. \quad (35)$$

Тогда для центра круговой подачи инструмента можно получить:

$$x_{2cOf} = x_{2cM} - (\rho_f + h_M) \cos \delta_{f0}; \quad (36)$$

$$z_{2cOf} = z_{2cM} - (\rho_f + h_M) \sin \delta_{f0}. \quad (37)$$

Углы и ширина профиля инструмента определяются по координатам  $y_{2cMR,L} = z_{MR,L}$  и углам профиля  $\alpha_{MR,L}$  (см. рис. 8) в точках  $M_R$  и  $M_L$ :

$$\sin \alpha_{MR,L} = \mathbf{n}_{MR,L} \mathbf{k}_0 = \mathbf{n}_{MR,L} \mathbf{j}_{2c}. \quad (38)$$

Обратим внимание на различие в выборе параметров нарезания для звеньев передачи – проекти-

руемого первым (выше принята шестерня) и вторым. В первом случае производящая поверхность инструмента и его траектория «пристраиваются» к конусу впадин в среднем сечении зуба, во втором – к сопряженной (отсчетной) поверхности в выбранной расчетной точке.

#### Оценка локализованного контакта в передаче

По найденным параметрам наладки можно выполнить расчет модифицированной поверхности, используя методику, изложенную в п. 7 для шестерни. Оценки локализованного контакта даются на основе анализа поля модификаций (в иностранной литературе Ease-Off) – расстояний между модифицированной поверхностью и сопряженной поверхностью зуба колеса, рассчитанных в направлении нормали к поверхности зуба ( $\delta_n$ ) или в направлении поворота колеса ( $\delta_{02}$ ). Расчет модификаций методически прост, если обе поверхности найдены как наборы точек на одной и той же регулярной сетке точек (рис. 4):

$$\delta_{02ij} = (\theta_{2\text{mod } ij} - \theta_{2\text{ref } ij}) r_{2ij}. \quad (39)$$

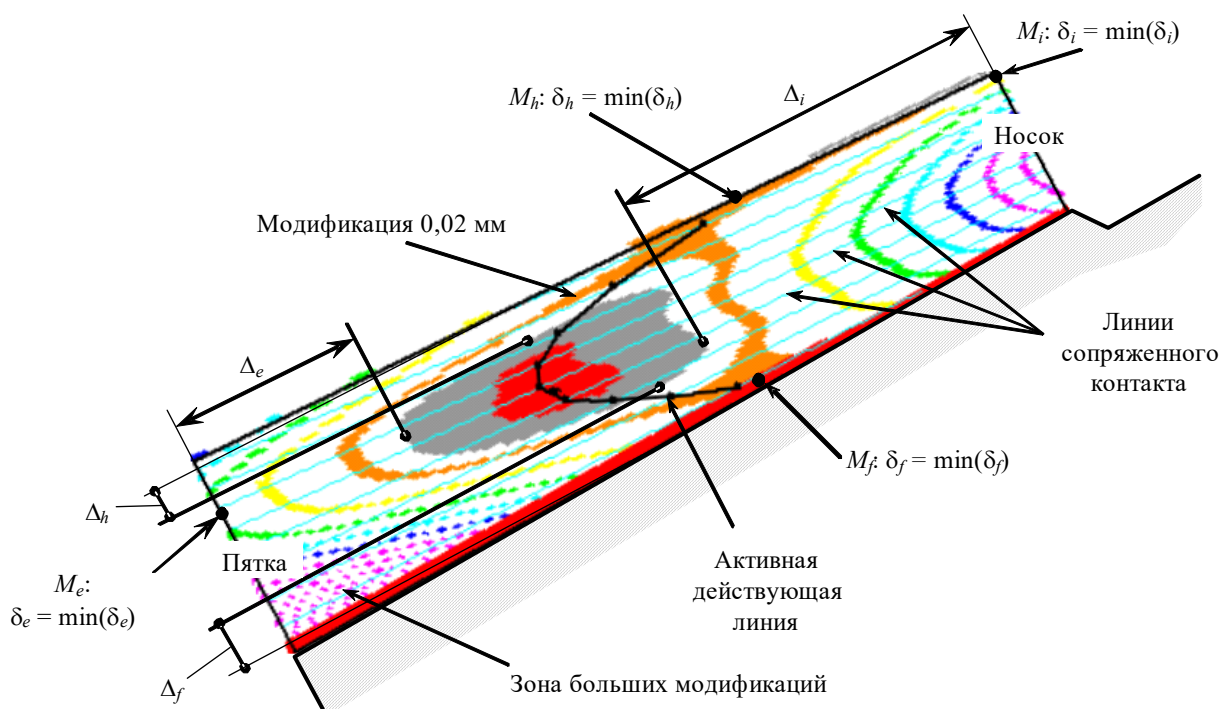


Рис. 8. Поле модификаций на осевой проекции зуба колеса и его оценки

Fig. 8. Ease-Off on the axial projection of the gearwheel tooth and its values

Само по себе визуальное представление модификаций (рис. 8) при относительно небольшом опыте проектирования уже дает интуитивно формируемую пользователем оценку верности выбранных параметров:

- модификации должны плавно увеличиваться от центра зуба к его краям;
- они не должны быть слишком большими, чтобы не вызвать большой концентрации напряжений и большой погрешности пересопряжения зубьев;

- желательно избегать или ограничивать размеры дефектов зуба (см. рис. 6).

Количественные оценки поля (распределения) модификаций (рис. 8):

А) расстояния  $\Delta_{i,e,h,f}$  от кромок зубьев до крайних точек зоны с модификациями, ограниченными заданной небольшой величиной (0,02 мм на рис. 8);

Б) величины продольного и профильного завала (модификации  $\delta_{i,e,h,f}$ ).

Следующие оценки связаны с активной действующей линией (ГОСТ 16530–83, в иностранной терминологии Contactpath). Это саморасположение этой линии и погрешность геометрического пересопряжения зубьев. По сути, в нескольких фиксированных положениях шестерни (при фиксированном  $\varphi_1$ ) следует решить так называемую обратную задачу теории зубчатых зацеплений – найти угловое положение колеса, при котором модифицированная боковая поверхность зубьев колеса вступит в контакт с поверхностью шестерни [12, 13]. Разница  $\Delta\varphi_2 = \varphi_{2nom} - \varphi_{2mod} = \varphi_1/i - \varphi_{2mod}$  между номинальным углом поворота колеса и найденным угловым положением есть местная кинематическая погрешность. Находя точки контакта и углы  $\Delta\varphi_2$  при разных  $\varphi_1$ , можно получить активную действующую линию и график погрешности  $\Delta\varphi_2(\varphi_1)$ . График, построенный для рассматриваемого зуба, пересекается с аналогичными графиками для соседних зубьев – преды-

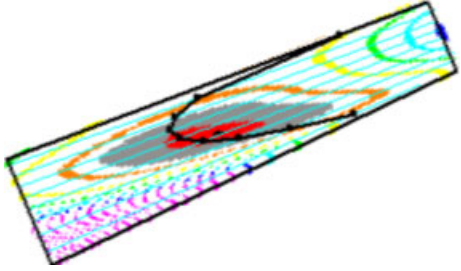
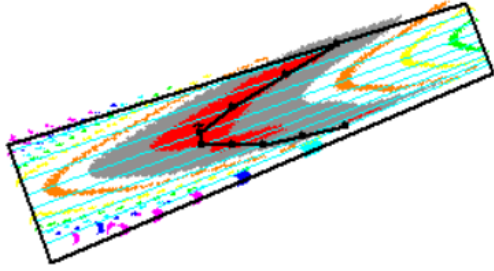
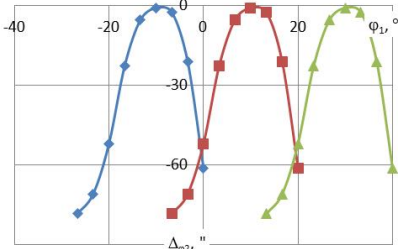
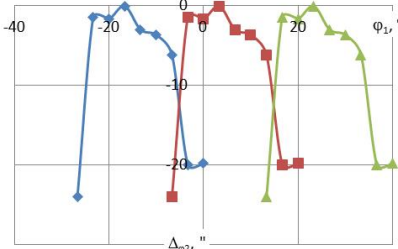
дущего и последующего. Точки пересечения этих графиков дают погрешность геометрического пересопряжения зубьев (строка 16 таблицы, в иностранной литературе Transmissionerror).

### 9. Примеры синтеза локализованного контакта

Изложенный алгоритм проектирования реализован в компьютерной программе Bevel+. В таблице приведены два примера расчета передач. В варианте 1 зубья колеса образованы коническим дисковым инструментом, а зубья шестерни – инструментом, профиль которого очерчен двумя плавно сопряженными дугами окружностей (их радиусы  $\rho$  обозначены в таблице нижними символами (1) и (2)). В варианте 2 предполагается более точная технология: зубья колеса и шестерни должны быть образованы дисковыми шлифовальными кругами с криволинейным профилем; дополнительно продемонстрирована возможность применения одного и того же инструмента для шестерни и колеса.

### Параметры рассчитанных передач и локализованного контакта в них

#### Parameters of calculated gears and localized contact in them

№	Параметр	Вариант 1	Вариант 2
1	$i$	2,611 (47:18)	
2	$d_{w\epsilon 2}$ , мм	188	
3	$b$ , мм	32	
4	$\delta_{ax1} / \delta_{ax2}$	20,96° / 69,04°	
5	$\delta_{w1} / \delta_{w2}$	23,0° / 67,0°	20,2° / 69,8°
6	$m_{im}$ , мм	3,3732	3,3611
7	$X_1$	0,30	0,21
8	$\delta_a$	2,70°	3,05°
9	$\delta_{\theta 1} / \delta_{\theta 2}$	22,60° / 63,85°	17,35° / 66,79°
10	$\frac{\alpha_{01R}, \alpha_{01L}}{\alpha_{02R}, \alpha_{02L}}$	$\frac{29,00^\circ}{30,55^\circ}$	30°
11	$\frac{\rho_{01R,L}(1)}{\rho_{02R,L}(1)}$ , мм	$\frac{12,5}{99999}$	28
12	$\frac{\rho_{01R,L}(2)}{\rho_{02R,L}(2)}$ , мм	$\frac{9,0}{99999}$	15
13	$s_{01} / s_{02}$ , мм	4,217 / 6,189	5,022
14	$\rho_1 / \rho_2$ , мм	1000 / 99999	5000 / 999999
15	Поле модификаций		
16	График местной кинематической погрешности		



По полученным результатам (строки 15, 16 таблицы) можно сделать главный вывод: рассматриваемая схема формообразования зубьев и предложенные методы и алгоритм расчета дают возможность эффективного управления профильной и продольной локализацией контакта. В частности, в рассмотренных передачах теоретически возможно получить погрешность зубцовой частоты не хуже 7-й (вариант 1) и 4-й (вариант 2) степени точности по ГОСТ 1758–81.

### 10. Выводы

В статье предложена методика проектирования (имея в виду, в первую очередь, выбор и оценку геометрических параметров) прямозубой конической передачи, зубья которой могут быть нарезаны копированием дискового инструмента на распространенном металлорежущем оборудовании – фрезерных обрабатывающих центрах и зубошлифовальных станках, работающих по схеме копирования. Предложены приемы проектирования, в частности, для лучшего управления геометрией зубьев предложено сделать варьируемыми при проектировании углы начальных конусов и угол понижения зубьев, жестко регламентируемые при стандартном проектировании прямозубых конических передач. Главный вывод, сделанный в работе, – предложенный набор наладочных параметров и методика их выбора дают возможность обеспечения практически необходимой погрешности зубцовой частоты при контакте, локализованном в центральной части зуба. К потенциальным преимуществам рассматриваемой разновидности передачи перед традиционной нужно отнести простоту технологии зубообработки и контроля профиля зуба, совпадающего с профилем инструмента (в частности, круговым или прямолинейным).

### Библиографические ссылки

1. Syzrantsev V.N., Pazyak A.A. (2025) Developing a computerized model for the longitudinal localization of a straight bevel gear with a small shaft angle with a non-generated gear and a generated pinion. Book: Mechanisms and Machine Science, pp. 309-325. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-75251-3\_19
2. Volkov A.E., Biryukov S.S. (2025) Design and Technological Preproduction of Straight Bevel Gears with Forged Teeth. Theory and Practice of Gearing and Transmissions: Part of the book series, vol. 172. Zug : Springer Nature Switzerland AG (Zug), pp. 277-291. DOI: 10.1007/978-3-031-75251-3\_17
3. Volkov A.E., Biryukov S.S. (2022) Technological preparation of production of straight-tooth bevel gears for production by stamping. *Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii*, № 13, pp. 150-154. DOI: 10.26160/2309-8864-2022-13-150-154
4. Волков А. Э., Лагутин С. А., Бирюков С. С. Программный комплекс для расчета прямозубых конических передач с локализованным контактом // Интеллектуальные системы в производстве. 2020. Т. 18, № 3. С. 77–84. DOI: 10.22213/2410-9304-2020-3-77-84
5. Gosselin C. (2020) Advanced computer-aided gear design, analysis and manufacturing. In: Goldfarb V., Trubachev E., Barmina N. (eds.) New approaches to gear design and production. Mechanisms and Machine Science, vol. 81. Springer, Cham. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34945-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34945-5_3)

6. Шевелева Г. И., Волков А. Э., Медведев В. И. Программный комплекс для подготовки производства спирально-конических зубчатых передач // Вестник машиностроения. 2005. № 9. С. 6–14.

7. Гольдфарб В. И. Аспекты проблемы автоматизации проектирования передач и редукторов // Передачи и трансмиссии: научный журнал Технического комитета по зубчатым передачам IFToMM. 1991. № 1. С. 20–24.

8. Сегаль М. Г. Об определении границ пятна контакта зубьев конических и гипоидных передач // Машиноведение. 1972. № 4.

9. Fan Q. (2016). Ease-Off and Application in Tooth Contact Analysis for Face-Milled and Face-Hobbed Spiral Bevel and Hypoid Gears. In: Goldfarb V., Barmina N. (eds.) Theory and Practice of Gearing and Transmissions. Mechanisms and Machine Science, vol. 34. Springer, Cham. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-19740-1\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19740-1_15)

10. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М. : Наука, 1968. 584 с.

11. Litvin F.L., Fuentes A. (2004) Gear Geometry and Applied Theory. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge University Press, 2004.

12. Лопато Г. А., Кабатов Н. Ф., Сегаль М. Г. Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями. Л. : Машиностроение, 1977. 423 с.

13. Шевелева Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел. М. : Станкин, 1999. 494 с.

### References

1. Syzrantsev V.N., Pazyak A.A. (2025) Developing a computerized model for the longitudinal localization of a straight bevel gear with a small shaft angle with a non-generated gear and a generated pinion. Book: Mechanisms and Machine Science, pp. 309-325. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-75251-3\_19
2. Volkov A.E., Biryukov S.S. (2025) Design and Technological Preproduction of Straight Bevel Gears with Forged Teeth. Theory and Practice of Gearing and Transmissions: Part of the book series, vol. 172. Zug : Springer Nature Switzerland AG (Zug), pp. 277-291. DOI: 10.1007/978-3-031-75251-3\_17
3. Volkov A.E., Biryukov S.S. (2022) Technological preparation of production of straight-tooth bevel gears for production by stamping. *Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii*, № 13, pp. 150-154. DOI: 10.26160/2309-8864-2022-13-150-154
4. Volkov A.E., Lagutin S.A., Biryukov S.S. (2020). [A software package for calculating straight-tooth bevel gears with localized contact]. *Intellektualnye sistemy v proizvodstve*, vol. 18, no. 3, pp. 77-84. DOI: 10.22213/2410-9304-2020-3-77-84 (in Russ.).
5. Gosselin C. (2020) Advanced computer-aided gear design, analysis and manufacturing. In: Goldfarb V., Trubachev E., Barmina N. (eds.) New approaches to gear design and production. Mechanisms and Machine Science, vol. 81. Springer, Cham. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34945-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34945-5_3)
6. Sheveleva G.I., Volkov A.E., Medvedev V.I. (2005) [Software package for the preparation of production of spiral bevel gears]. *Vestnik mashinostroyeniya*, № 9, pp. 6-14 (in Russ.).
7. Goldfarb V.I. (1991) [Aspects of the problem of automation of design of transmissions and gearboxes]. *Peredachi i transmissii: Nauchnyi zhurnal Tekhnicheskogo komiteta po zubchatim peredacham IFToMM*, № 1, pp. 20-24 (in Russ.).
8. Segal M.G. (1972) [On the determination of the boundaries of the contact patch of teeth of bevel and hypoid gears]. *Mashinovedenie*, № 4 (in Russ.).
9. Fan Q. (2016). Ease-Off and Application in Tooth Contact Analysis for Face-Milled and Face-Hobbed Spiral Bevel and Hypoid Gears. In: Goldfarb, V., Barmina, N. (eds.) Theory

and Practice of Gearing and Transmissions. *Mechanisms and Machine Science*, vol. 34. Springer, Cham. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-19740-1\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19740-1_15)

10. Litvin F.L. (1968) *Teoriya zubchatikh zatseplenii* [Theory of gearing]. Moscow : Nauka Publ., 1968, 584 p. (in Russ.).

11. Litvin F.L., Fuentes A. (2004) *Gear Geometry and Applied Theory*. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge University Press, 2004.

12. Lopato G.A., Kabatov N.F., Segal M.G. (1977) *Koni-cheskie i gipoidnie peredachi s krugovimi zubyami* [Bevel and hypoid gears with circular teeth]. Leningrad : Mashinostroenie Publ., 1977, 423 p. (in Russ.).

13. Sheveleva G.I. (1999) *Teoriya formoobrazovaniya i kontakta dvizhushchikhsya tel* [Theory of formation and contact of moving bodies]. Moscow: Stankin, 494 p. (in Russ.).

### A Straight Bevel Gear Generated by Copying with a Disk Tool

E.S. Trubachev, DSc in Engineering, Professor, Institute of Mechanics named after prof. V.I. Goldfarb, Kalashnikov ISTU; LLC Small Innovative Enterprise "Mekhanik", Izhevsk, Russia

*A kind of bevel gear with straight teeth generated by copying with a disk tool (milling cutter or grinding wheel) is considered. Tothing process in such a gear can be performed on common non-specialized machines. A design methodology, including transmission scheme and pinion cutting parameter selection, the conjugate gearwheel geometry and conjugate meshing calculation, gearwheel cutting parameter selection and the assessment of localized contact, is proposed. The gear features are characterized, in particular: the approximate nature of the meshing and, accordingly, the need to minimize the error of the teeth recoupling, the difference between the axoids and the initial surfaces, the need for a special angle selection of tooth downing and pinionshift. Methods for selection the cutting gear link parameters are given, that technically, demand contact between the generating surface and its feed path and the pinion bottom surface and the gearwheel reference surface. The theoretical possibility of ensuring 7th and 4th degree of accuracy in terms of smooth operation is demonstrated by the two calculation examples.*

**Keywords:** bevel gear, tooth cutting, gear design.

Получено 09.11.2025

### Образец цитирования

Трубачев Е. С. Прямозубая коническая передача с зубьями, образованными дисковым инструментом по схеме копирования // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2025. Т. 28, № 4. С. 36–45. DOI: 10.22213/2413-1172-2025-4-36-45

### For Citation

Trubachev E.S. (2025) [A Straight Bevel Gear Generated by Copying with a Disk Tool]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, vol. 28, no. 4, pp. 36-45. DOI: 10.22213/2413-1172-2025-4-36-45 (in Russ.).