

УДК 621.833.52

DOI: 10.22213/2413-1172-2025-4-46-55

## Кинематика зуботочения сборного гиперboloидного зубчатого колеса

**А. Р. Абзалов**, кандидат технических наук, доцент, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

**М. В. Печёнкин**, кандидат технических наук, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

**Р. Ш. Хасанов**, кандидат экономических наук, профессор, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева – КАИ; ПО «Завод имени Серго», Зеленодольск, Россия

**С. Ю. Юрасов**, кандидат технических наук, доцент, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

*Исследованы аспекты возможной обработки зубьев зубчатых колес на заготовке вида однополостного гиперboloида вращения зуботочением. Известные способы обработки зубчатые колеса, выполненные на базе заготовки вида однополостного гиперboloида вращения предполагают построчное снятие припуска концевым инструментом при обработке зубьев, что значительно повышает трудоемкость изготовления таких зубчатых колес. По этой причине рассматриваемые зубчатые колеса не получили широкого распространения вследствие возможности их замены другими видами передач с перекрещивающимися осями. В статье рассмотрен процесс кинематики формообразования зубьев зубчатых колес на заготовке вида однополостного гиперboloида вращения зуботочением. Выведены аналитические зависимости формообразования зубьев зубчатых колес, выполненных на однополостном гиперboloиде вращения зуботочением. Показано, что для зубчатых колес с формой начальных поверхностей вида однополостной гиперboloид вращения процесс формообразования инструмента в сопряжении с колесом возможен только для заданного передаточного отношения даже при одинаковом модуле. По этой причине режущих кромок (пластин) у инструмента будет столько же, как и у колеса, с которым предполагается обрабатываемое колесо. Для снижения трудоемкости предлагается наличие параметрических моделей делительных гиперboloидов обрабатываемого колеса и инструмента. Ввиду особенностей геометрии зуба таких зубчатых колес обработку боковой поверхности зубьев зуботочением предполагается производить за два установа. При осуществлении формообразования зубьев настройка корректности положения режущих кромок относительно боковой поверхности зубчатого колеса производится с помощью настроечных баз. Для дальнейшей проработки вопроса кинематики зуботочения рассматриваемых зубчатых колес необходимо разработать рациональную конструкцию режущего инструмента и геометрию пластин, дополнительно проработать возможность осуществления зуботочения на многокоординатных станках с ЧПУ с использованием имитационных и натурных моделей.*

**Ключевые слова:** гиперboloидное зубчатое колесо, формообразование зубьев, зубчатые колеса на заготовке вида однополостного гиперboloида вращения, зуботочение, skiving process.

### Введение

В современных условиях в машиностроении наиболее широкое распространение среди передач с перекрещивающимися осями получили червячные, винтовые, гипоидные и спироидные передачи [1]. Все перечисленные передачи Государственным стандартом 16530–83 «Передачи зубчатые. Общие термины, определения и обозначения» отнесены к гиперboloидным передачам. В спироидной, гипоидной, винтовой, червячной передаче и др. начальные и делительные поверхности заменены на конические, цилиндрические, отличные от конических, и др. [2].

На основные виды деталей механических, в том числе зубчатых передач в САД-системах реализован инструмент моделирования данных деталей [3–7]. Для производства основных видов зубчатых колес существуют хорошо отработанные технологии, и имеется в наличии широкий спектр оборудования.

Технологические трудности изготовления гиперboloидных зубчатых передач на заготовке вида однополостной гиперboloид вращения препятствовали их широкому распространению, однако проводились

как теоретические, так и экспериментальные исследования [8, 9], на основе которых можно предположить их высокую нагрузочную способность и возможность передавать одинаковую мощность при реверсировании. Известные на сегодня способы обработки таких зубчатых колес включают в себя методы копирования, не позволяющие производить точную и высокопроизводительную обработку. Кроме того, при реализации метода копирования требуются две операции при образовании двух участков боковой поверхности. Известен также способ обработки таких зубчатых колес, который подразумевает применение монолитных многозубых летучих (другое название – обкаточных) резцов, (Печёнкин В. М. Исследование гиперboloидной зубчатой передачи с двумя зонами контакта : дис. ... канд. тех. наук. Новосибирск, 1983). Обкаточные резцы выполнены из быстрорежущей стали и обладают большим числом режущих зубьев и режущих кромок, что обеспечивает более высокую производительность обработки таких зубчатых колес по сравнению с методом копирования.

**Целью** настоящей работы является исследование возможности применения метода зуботочения для

обработки зубьев сборных гиперболоидных зубчатых колес, анализ потенциальных средств технологического оснащения, а также подходов для осуществления такой механической обработки.

### Обработка зубьев методом зуботочения

Наличие современных многокоординатных станков с ЧПУ позволяет разрабатывать управляющие программы обработки зубчатых колес, как по геометрическим моделям, так и с применением аналитических выражений [10].

В последнее время значительно расширилось применение обработки зубьев методом зуботочения (skiving process) [11].

В течение долгого времени метод не мог быть практически реализован вследствие технологических ограничений схем формообразований – не было соответствующего оборудования, программного обеспечения [12]. В его основе лежит использование специального многозубого инструмента в форме чашки, перекрещивание под углом в пространстве осей детали и инструмента (рис. 1) [13] и синхронное вращение детали и заготовки на большой скорости.

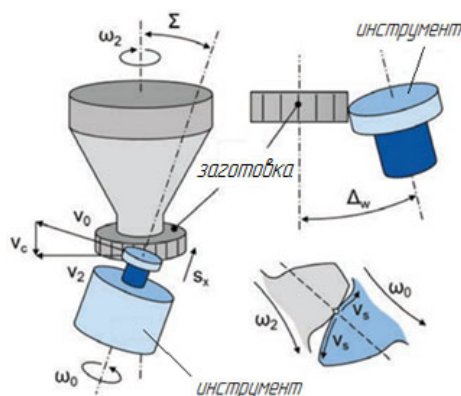


Рис. 1. Схема зуботочения цилиндрических зубчатых колес

Fig. 1. Skiving process principal illustration for cylindrical gearwheels

Метод обработки зубьев зуботочением получает всё большее распространение в схемах и операциях формообразования ведущих производителей оборудования и режущего инструмента [14–16].

В отличие от зубодолбления формообразование зубьев выполняется при скрещивающихся осях инструмента и заготовки без возвратно-поступательных движений. Это обеспечивает значительное снижение трудоемкости обработки. Кроме того, повышается динамическая устойчивость технологической системы, что позволяет наряду с инструментом из быстрорежущей стали применять твердый сплав в качестве материала режущей кромки.

Зуботочение успешно применяется не только для обработки цилиндрических, но и спироидных, червячных и конических зубчатых колес с помощью обкаточных резцовых головок, оснащенных твердосплавными пластинами [17]. Геометрические особенности боковых поверхностей зубьев, сформиро-

ванных на заготовке вида однополостного гиперболоида вращения, обусловленные кинематикой их формообразования, предполагают наличие возможности зуботочения и для обработки данного вида зубчатых колес.

Подобный инструмент в виде чашки используется и для обработки сложнопрофильных межлопаточных каналов моноколеса ГТД [18] (рис. 2).

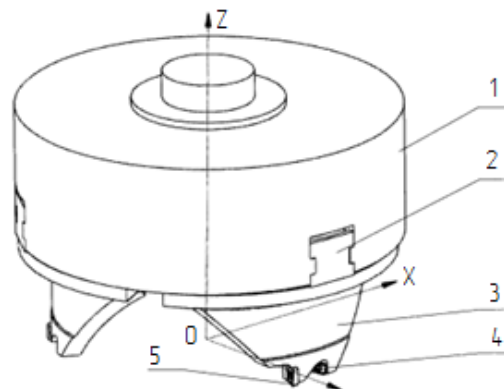


Рис. 2. Инструмент для черновой обработки межлопаточных каналов моноколеса

Fig. 2. Cutting tool for blisks blades machining

Для ортогональной передачи при условии использования в качестве образующей отрезка прямой, заданной в нормальном сечении к боковой поверхности зуба, проведенной из горлового сечения, частный вариант сопряженных боковых поверхностей зубчатого колеса и инструмента, работающих в паре, можно рассчитать без расчета винтовой линии. В данном случае боковая поверхность зуба формируется по сечениям. Сечениями являются двухпараметрические производящие линии, режущие кромки инструмента.

Одним независимым параметром семейства является угол поворота инструмента, вторым – угол поворота оси инструмента относительно обрабатываемой заготовки в относительном движении. Движение подачи осуществляется для врезания. Завершающий этап обработки осуществляется без подачи. Характер кривизны боковой поверхности зуба в горловом сечении меняется от вогнутой на выпуклую. Следовательно, расчет должен осуществляться для каждой половины боковой поверхности зуба по отдельному алгоритму, суть которых приводится ниже.

Осью вращения инструмента является ось вращения  $O_1Y_1$  (рис. 3). Осью вращения зубчатого колеса в процессе формообразования является ось  $O_2Y_2$ .

### Методика расчета

Для расчета режущих кромок инструмента и боковой поверхности колеса положим, что отрезок образующей  $AB$  вращается равномерно вокруг оси  $O_2Y_2$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$  – относительное движение в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ . Данное движение можно задать для двух точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих образующей:

$$\begin{aligned}\varphi_2^A(t) &= \varphi_2^A(0) + \omega_2 t; \\ \varphi_2^B(t) &= \varphi_2^B(0) + \omega_2 t,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\varphi_2^A(t)$ ,  $\varphi_2^B(t)$  – углы поворота, соответственно, точек  $A$  и  $B$  при равномерном вращении образующей вокруг оси  $Y_2$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $t$  – параметр (условно время) способный принимать как положительные, так и отрицательные значения.

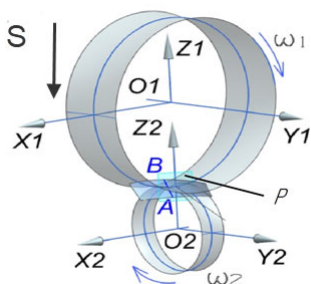


Рис. 3. К выводу аналитических зависимостей формообразования зубчатого колеса зуботочением

Fig. 3. Illustration for determining relations among geometric and kinematic parameters for gearwheel skiving process

Система координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  принята за неподвижную. Вокруг оси  $O_1X_1$  равномерно вращаются режущие кромки инструмента, которые в момент пересечения плоскости  $P$  совпадают с образующей боковой поверхности зуба. Плоскость  $P$  проходит перпендикулярно образующей делительных гиперболоидов через точку пересечения делительных окружностей в горловых сечениях. Ось вращения инструмента  $O_1X_1$  вместе с системой координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  равномерно вращается вокруг оси  $O_2X_2$  с угловой скоростью  $\omega_1 = \omega_2/i$ , где  $i$  – передаточное отношение, равное отношению диаметров гиперболоидов 1 к 2 в горловых сечениях. Это будет переносным движением.

Траектории абсолютного движения рассчитываются отдельно для точки  $A$  и точки  $B$  как векторные суммы относительных и переносных движений:

$$\begin{aligned}\overline{O_1A} &= \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A}; \\ \overline{O_1B} &= \overline{O_1O_2} + \overline{O_2B},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\overline{O_1A}$ ,  $\overline{O_1B}$  – радиус-векторы положений точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $\overline{O_1O_2}$  – радиус-вектор положения точки  $O_2$  в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $\overline{O_2A}$ ,  $\overline{O_2B}$  – радиус-векторы положений точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ .

Расчет проводится для четырех половин двух поверхностей, работающих в сопряжении в процессе формообразования. Рассмотрим методику расчета для одной второй обрабатываемого зубчатого колеса.

Координаты точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  будут определяться как

$$\begin{aligned}x_1^A(t) &= r_A \cos(\varphi_1^A(0) + \omega_1 t); \\ z_1^A(t) &= r_A \sin(\varphi_1^A(0) + \omega_1 t); \\ y_1^A(t) &= y_1^A(0); \\ x_1^B(t) &= r_B \cos(\varphi_1^B(0) + \omega_1 t); \\ z_1^B(t) &= r_B \sin(\varphi_1^B(0) + \omega_1 t); \\ y_1^B(t) &= y_1^B(0),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $r_A, r_B$  – соответственно, расстояния от точек  $A$  и  $B$  до оси вращения  $O_1Y_1$ .

Орт-векторы системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  необходимо определить через орт-векторы системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  в зависимости от значения параметра  $t$ :

$$\begin{aligned}i_1 &= i_2; \\ j_1 &= j_2 \sin(\varphi_0 + \omega_{21}(t)) - k_2 \cos(\varphi_0 + \omega_2(t)); \\ k_1 &= j_2 \cos(\varphi_0 + \omega_2(t)) + k_2 \sin(\varphi_0 + \omega_2(t)).\end{aligned}\quad (4)$$

При подстановке данных выражений в уравнения (3) можно рассчитать положение образующей, зависящей от значения параметра  $t$ . При изменении  $t$  от нуля в положительном направлении получим положение сечения для половины формообразующей боковой поверхности первого зубчатого колеса. При изменении направления вращения инструмента и зубчатого колеса получаем вторую часть обрабатываемого зуба.

Введем обозначения:

- $z_1$  – число режущих пластин инструмента;
- $z_2$  – число зубьев нарезаемого гиперболического зубчатого колеса;
- $m$  – модуль зубчатого колеса в горловом сечении;
- $i = \frac{z_2}{z_1}$  – формальное передаточное отношение, реализуемое в процессе зуботочения между нарезаемым зубчатым колесом и режущим инструментом;
- $d_1 = mz_1$  – формальный делительный диаметр режущего инструмента в горловом сечении;
- $d_2 = mz_2$  – делительный диаметр нарезаемого зубчатого колеса в горловом сечении;
- $a_w = (d_1 + d_2)/2$  – кратчайшее межосевое расстояние между осью вращения инструмента и обрабатываемого зубчатого колеса;
- $\varphi$  – угол скрещивания между осью вращения инструмента и нарезаемого колеса;
- $\varphi_1$  – угол скрещивания оси вращения инструмента и образующей гиперболоидов;

$\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$  – угол скрещивания оси вращения колеса и образующей гиперboloидов;

$l_o$  – половина длины образующей делительных гиперboloидов вращения;

$\omega_1$  – угловая скорость вращения инструмента;

$\omega_2 = \omega_1/i$  – угловая скорость вращения обрабатываемого гиперboloидного колеса.

Режущая кромка инструмента в процессе формообразования зуба зубчатого колеса должна совпадать с образующей боковой поверхности зуба (рис. 4).

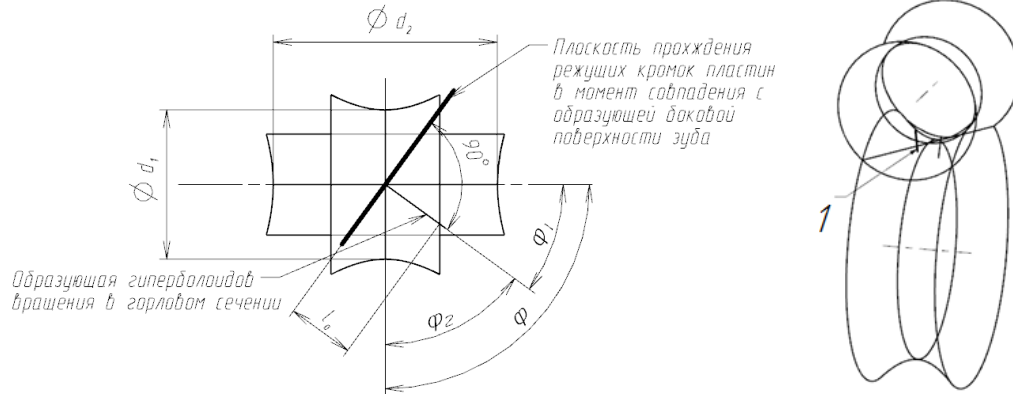


Рис. 4. Режущая кромка (I) инструмента в момент ее нахождения на плоскости, в которой, располагается образующая боковой поверхности зуба

Fig. 4. Cutting edge (I) of a tool at the moment then it is located in a plane of gear tooth formig line

### Изготовление зубчатых колес

В процессе формообразования начальное относительное положение обрабатываемого зубчатого колеса и инструмента в процессе зуботочения должно находиться под углом скрещивания на расстоянии между осями вращения, обеспечивающего наличие расстояния врезания режущих пластин в заготовку.

Для изготовления зубчатых колес на заготовке вида однополостной гиперboloид вращения предлагается отработать процесс непосредственно на имитационных моделях в соответствующих програм-

мных продуктах.

В отличие от цилиндрических зубчатых колес у зубчатых колес с формой начальных поверхностей вида однополостного гиперboloид вращения процесс формообразования инструмента в сопряжении с колесом возможен только для заданного передаточного отношения даже при одинаковом модуле. По этой причине режущих кромок (пластин) у инструмента будет столько же, сколько и у колеса, с которым предполагается обрабатываемое колесо будет работать в паре (рис. 5).

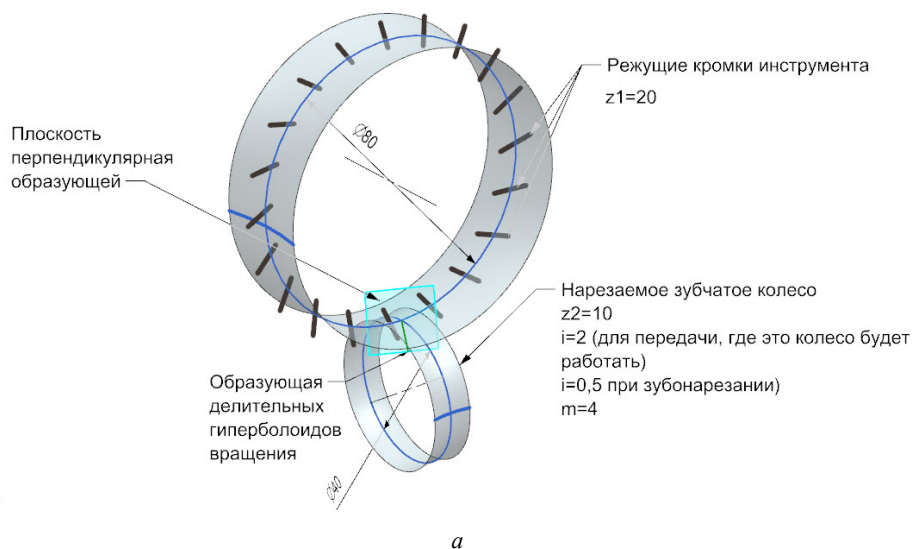


Рис. 5. Иллюстрация к пояснению необходимости использования индивидуального инструмента под одинаковый модуль, но разные передаточные отношения:  $a - m = 4, i = 2$

Fig. 5. Illustration to explain the necessity of individual cutting tool application for the same module, but different ratio of gearing:  $a - m = 4, i = 2$

Так как для каждого модуля, угла скрещивания и передаточного отношения требуется разрабатывать отдельный инструмент, то для снижения трудоемкости предлагается наличие параметрических моделей делительных гиперboloидов обрабатываемого колеса и инструмента. Геометрические параметры обрабатываемого зубчатого колеса и инструмента вводятся не-

посредственно в модуль моделирования CAD-системы и позволяют быстро производить перемоделирование в процессе имитации формообразования.

Можно предложить геометрию режущей пластины с режущей кромкой для формирования боковой поверхности  $l$  и выборки массива материала из впадины зуба (рис. 7).

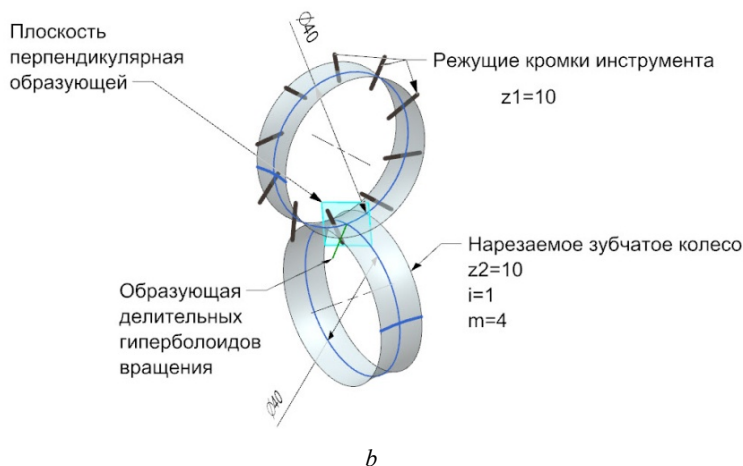


Рис. 5 (окончание):  $b - m = 4, i = 1$

Fig. 5 (continued):  $b - m = 4, i = 1$

5	aw	$(d1+d2)/2$
6	b1	$a1*\tan(\phi1)/\sin(\phi1)$
7	b2	$a2*\tan(\phi2)/\sin(\phi2)$
8	d1	$m*z1$
9	d2	$m*z2$
10	dt1	$\phi1$
11	dt2	20
12	$\phi$	90
13	$\phi1$	$\phi/(i+1)$
14	$\phi2$	$\phi-\phi1$
15	i	$z2/z1$
16	lo	20
17	m	4
18	z1	10
19	z2	15

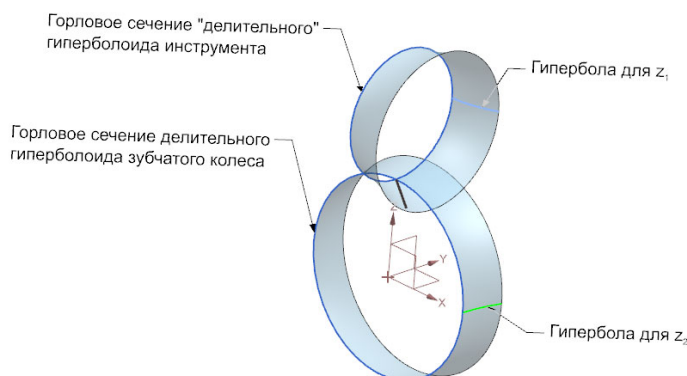


Рис. 6. Параметрическая модель сопрягаемых делительных гиперboloидов гиперboloидной передачи

Fig. 6. Parametric model of a dividing hyperboloids of mating gear wheels

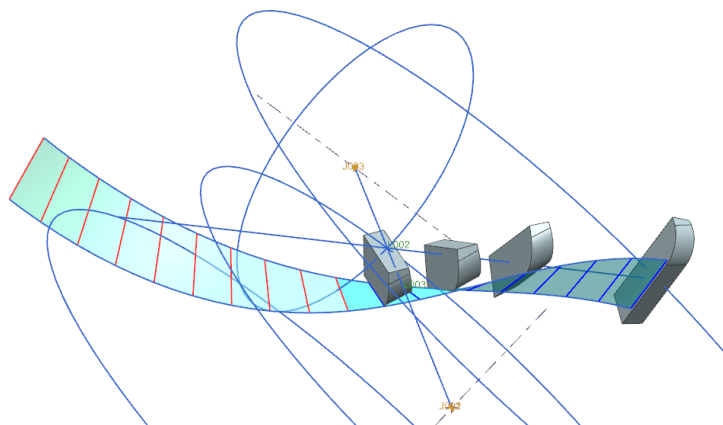


Рис. 7. Прохождение режущей кромки пластины по боковой поверхности зуба

Fig. 7. Cutting tool insert cutting edge movement along the working surface of a tooth



Для предлагаемой геометрии режущих пластин и инструмента рационально осуществить обработку поверхности 1 (на первом установе). После выборки массива материала из впадины зуба, инструментально доступными становятся поверхности 2 (на втором установе) при обработке этим же инструментом (рис. 8).

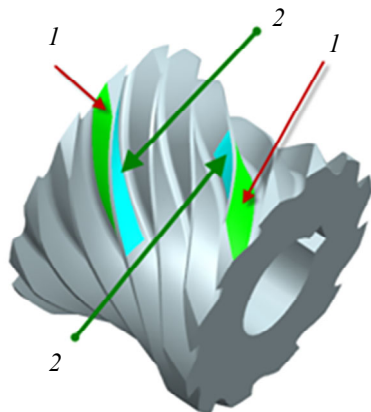


Рис. 8. Различная ориентация нормалей к боковым поверхностям зуба 1 и 2 по отношению к оси вращения

Fig. 8. Illustration to demonstrate different normal vector orientation for working surfaces of teeth 1 and 2 related to the revolving axis

Условно назовем поверхность 1 (рис. 8) выпуклой, а поверхность 2 – вогнутой. Прелгается осуществлять обработку сборных гиперболоидных колес, разделенных по плоскости перпендикулярной оси вращения в горловом сечении. Зубчатый венец обладает зеркальной симметрией. Заготовка устанавливается на оправку (рис. 9) и обрабатывается за два установа.

Настройка корректности совмещения боковых поверхностей зубьев, как сопрягаемых половинок, так и относительного положения выпуклых и вогнутых сторон, обеспечивается за счет настроечных баз. Одной из настроечных баз является плоскость горлового сечения обрабатываемого колеса, вторую, обеспечивающую совмещение образующей боковой поверхности и режущей кромки инструмента в соответствующей плоскости (рис. 10), необходимо предусмотреть на оправке по модели.

На установе А осуществляется обработка выпуклой поверхности зуба и выборка массива материала из впадины. На установе Б осуществляется дообработка вогнутой боковой поверхности зуба (рис. 11). Первоначальная обработка выпуклой стороны зуба позволяет предусмотреть относительно простую геометрию режущей пластины, но требует зубчатое колесо делать сборным. При переустанове этим же инструментом обрабатывается вогнутая сторона зуба.

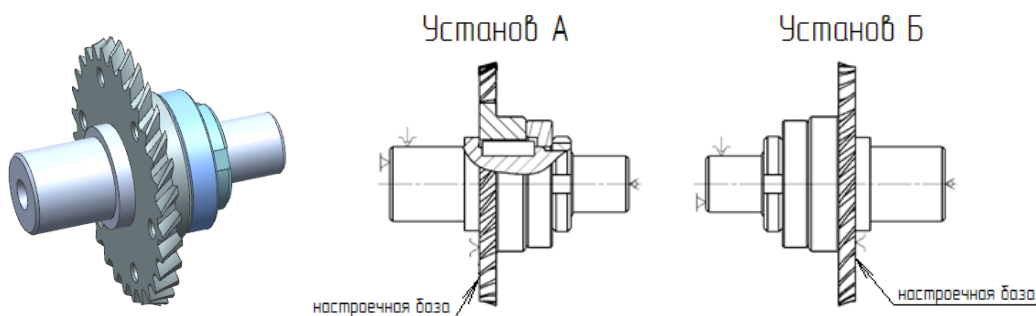


Рис. 9. Установка детали на оправку (стопорная шайба не показана)

Fig. 9. Fixturing the machine part on a mandrel

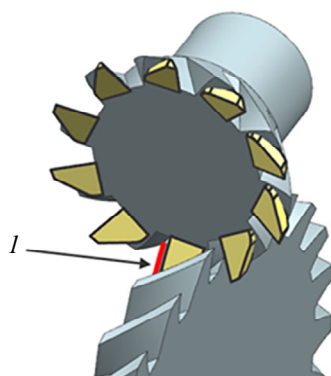


Рис. 10. Обеспечение требуемого относительного углового положения заготовки и инструмента за счет совмещения режущей кромки и образующей боковой поверхности 1

Fig. 10. Figuring out proper angle position of a workpiece and a cutting tool by positioning cutting edge on tooth surface forming line 1

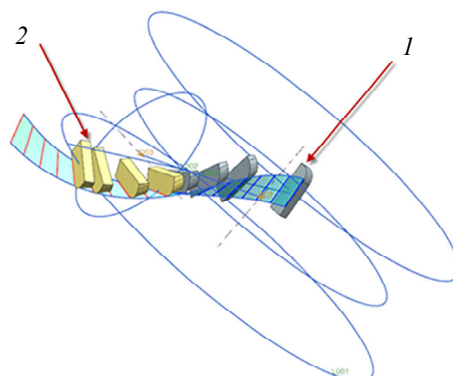


Рис. 11. Обработка выпуклой боковой поверхности зуба 1 на установе А; обработка вогнутой поверхности 2 зуба на установе Б

Fig. 11. Convex 1 and concave 2 tooth surfaces machining on A and B setups respectively

При скоординированном вращении обрабатываемой заготовки и инструмента  $\omega_2 = \omega_1/i$  осуществляется подача в направлении сближения осей вращения до значения  $a_w = (d_1 + d_2)/2$  в случае чистовой обработки (рис. 12). Предполагается, что после сборки будет иметь место погрешность несовмещения боковых поверхностей зубьев. Поэтому предполагается черновую обработку осуществить до сборки, предусмотрев соответствующий припуск, чистовую и отделочную обработку – после сборки. При необходимости предусмотреть термообработку.

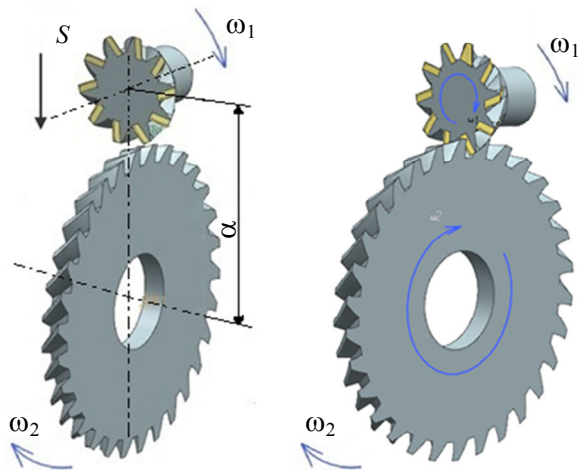


Рис. 12. Схема зуботочения сборного гиперболического зубчатого колеса

Fig. 12. Skiving process principal illustration for ready-to-assemble hyperboloid gear wheel

### Разработка конструкции режущего инструмента

На данный момент предполагается дальнейшая проработка вопроса кинематики зуботочения гиперболических зубчатых колес. Ставятся задачи разработки конструкции режущего инструмента, проработки возможности осуществления зуботочения на многокоординатных станках с ЧПУ, в том числе и на зубообрабатывающих, располагающих возможностью осуществлять согласованную обработку поворотов инструмента и заготовки в соответствии с передаточным отношением передачи, в котором будет применяться нарезаемое колесо. Технически это возможно также реализовать на оборудовании без ЧПУ за счет подбора комплектов зубчатых колес, реализующих необходимое соотношения частот вращения заготовки и инструмента.

Также прорабатывается вопрос разработки и изготовления экспериментального стенда для постановки экспериментов по зуботочению гиперболических зубчатых колес.

Для обработки зуботочением зубчатого колеса необходимо обеспечение соответствия скорости резания любой точки режущей кромки пластины относительно боковой поверхности зуба благоприятному диапазону значений. Для расчета скорости предварительно определим закон относительного движение

точки  $A$  режущей кромки пластины по отношению к принятому неподвижным зубчатому колесу. Точка  $A$  равномерно вращается вокруг оси вращения инструмента  $O_2Y_2Z_2$  с угловой скоростью  $\omega_2 = \omega_1/i$ , где  $i$  – передаточное отношение передачи, в которой будет работать обрабатываемое колесо.

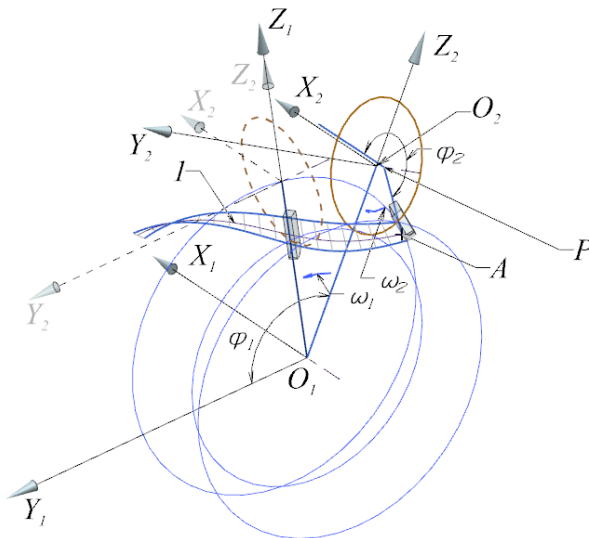


Рис. 13. К определению скорости режущей кромки инструмента

Fig. 13. Illustration to determine cutting edge velocity

Координаты точки  $A$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  (рис. 13) будут определяться как

$$\begin{aligned} x_2^A(t) &= |PA| \cos(\varphi_2^A(0) + \omega_2 t); \\ z_2^A(t) &= |PA| \sin(\varphi_2^A(0) + \omega_2 t); \\ y_2^A(t) &= y_2^A(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Орт-векторы системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  необходимо определить через орт-векторы системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  в зависимости от значения параметра  $t$ :

$$\begin{aligned} i_2 &= i_1; \\ j_2 &= j_1 \sin(\varphi_1(0) + \omega_1 t) - k_1 \cos(\varphi_1(0) + \omega_1 t); \\ k_2 &= j_1 \cos(\varphi_1(0) + \omega_1 t) + k_1 \sin(\varphi_1(0) + \omega_1 t). \end{aligned} \quad (6)$$

Точка  $P$  лежит на оси вращения инструмента. Отрезок  $PA$  перпендикулярен оси вращения. Рассматриваемая точка равномерно вращается (в обратном движении) вокруг оси вращения обрабатываемого зубчатого колеса  $O_1X_1Y_1Z_1$  с угловой скоростью  $\omega_1$ .

Координаты точки  $O_2$  в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$

$$\begin{aligned} x_1^P(t) &= x_1^P(0); \\ y_1^P(t) &= |O_1P| \cos(\varphi_1^P(0) - \omega_1 t); \\ z_1^P(t) &= |O_1P| \sin(\varphi_1^P(0) + \omega_1 t). \end{aligned} \quad (7)$$

Положение точки  $A$  в системе координат обрабатываемого колеса определяется векторной суммой

$$O_1 A = O_1 O_2 + O_2 A. \quad (8)$$

Вектор  $O_2 A$  в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  определяется следующим образом:

$$O_2 \vec{A} = |PA| \cos(\varphi_2^A(0) + \omega_2) \vec{i}_2 + y_2^A(0) \vec{j}_2 + |PA| \sin(\varphi_2^A(0) + \omega_2 t) \vec{k}_2; \quad (9)$$

$$O_2 \vec{A} = |PA| \cos(\varphi_2^A(0) + \omega_2) \vec{i}_1 + y_2^A(0) (j_1 \sin(\varphi_1(0) + \omega_1 t) - \vec{k}_1 \cos(\varphi_1(0) + \omega_1 t)) + |PA| \sin(\varphi_2^A(0) + \omega_2 t) \times (\vec{j}_1 \cos(\varphi_1(0) + \omega_1 t) + \vec{k}_1 \sin(\varphi_1(0) + \omega_1 t)).$$

Вектор  $O_1 O_2$  в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  определяется по формуле

$$O_1 \vec{O}_2 = 0 \vec{i}_1 + |O_1 O_2| \cos(\varphi_1^{O_2}(0) + \omega_1 t) \vec{j}_1 + |O_1 O_2| \sin(\varphi_1^{O_2}(0) + \omega_1 t) \vec{k}_1. \quad (10)$$

Соответственно, вектор  $O_1 A$  в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  будет определяться как

$$O_1 \vec{A} = |PA| \cos(\varphi_2^A(0) + \omega_2) \vec{i}_1 + y_2^A(0) \sin(\varphi_1(0) + \omega_1 t) + |PA| \sin(\varphi_2^A(0) + \omega_2 t) \cos(\varphi_1(0) + \omega_1 t) + |O_1 O_2| \cos(\varphi_1^{O_2}(0) + \omega_1 t) \vec{j}_1 + |O_1 O_2| \sin(\varphi_1^{O_2}(0) + \omega_1 t) - y_2^A(0) \cos(\varphi_1(0) + \omega_1 t) + |PA| \sin(\varphi_1^{O_2}(0) + \omega_1 t) \vec{k}_1. \quad (11)$$

Координаты точки  $A$  в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  определяются по выражениям

$$\begin{aligned} x_1^A &= x_1^{O_2}(0) + \alpha_{11} x_2^A(t) + \alpha_{21} y_2^A(t) + \alpha_{31} z_2^A(t); \\ y_1^A &= y_1^{O_2}(0) + \alpha_{12} x_2^A(t) + \alpha_{22} y_2^A(t) + \alpha_{32} z_2^A(t); \\ z_1^A &= z_1^{O_2}(0) + \alpha_{13} x_2^A(t) + \alpha_{23} y_2^A(t) + \alpha_{33} z_2^A(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты  $\alpha_{ij}$  определяются через косинусы орт-векторов подвижной и принятой за неподвижную систем координат:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\vec{i}_2 \vec{i}_1) & \alpha_{12} &= \cos(\vec{i}_2 \vec{j}_1) & \alpha_{13} &= \cos(\vec{i}_2 \vec{k}_1) \\ \alpha_{21} &= \cos(\vec{j}_2 \vec{i}_1) & \alpha_{22} &= \cos(\vec{j}_2 \vec{j}_1) & \alpha_{23} &= \cos(\vec{j}_2 \vec{k}_1) \\ \alpha_{31} &= \cos(\vec{k}_2 \vec{i}_1) & \alpha_{32} &= \cos(\vec{k}_2 \vec{j}_1) & \alpha_{33} &= \cos(\vec{k}_2 \vec{k}_1) \end{aligned} \quad (13)$$

Скорость заданной точки режущей кромки определяется по производной

$$\vec{V}_1^A = \frac{d}{dt}(O_1 A(t)). \quad (14)$$

## Выводы

В статье сделан обзор некоторых потенциально возможных технических решений, посвященных вопросам зуботочения зубчатых колес на заготовке вида однополостного гиперболоида вращения.

Приведены возможные технологические подходы при потенциальной практической реализации данного метода формообразования и выведены аналитические зависимости.

Результаты компьютерного и математического моделирования подтверждают возможность обработки зуботочением рассматриваемых зубчатых колес.

Однако процесс формообразования зубьев предложенным методом обработки возможен только при использовании индивидуального режущего инструмента, спроектированного исходя из заданного передаточного отношения. Тем не менее рассмотренный метод формообразования будет более производительным по сравнению с ранее известным методом построчного зубофрезерования концевыми фрезами.

## Библиографические ссылки

1. Классификация передач с перекрещивающимися осями / В. Е. Старжинский, С. В. Шилько, Е. В. Шалобаев, А. Л. Капелевич, В. Б. Альгин, Е. М. Петроковец // Теория и практика зубчатых передач и редукторостроения : сборник докладов научно-практической конференции. Ижевск, 2021. С. 149–178.
2. Кузьменко Н. Н., Михайлова А. Д. Геометрия и кинематика передачи, состоящей из цилиндрического квазигиперболоидного зубчатого колеса // Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля. 2022. № 4 (58). С. 203–208.
3. Абкаров А. А. Моделирование гиперболоидной зубчатой передачи // СНК-2021 : материалы LXXI Открытой международной студенческой научной конференции Московского Политеха. М., 2021. С. 37–42.
4. Гаджиева Р. Д., Алиев Б. Г. Особенности твердотельного компьютерного моделирования гиперболоидных передач // Актуальные вопросы прикладной физики и энергетики : II Международная научная конференция. Сумгаит, 2020. С. 385–388.
5. Трубочев Е. С. Программный комплекс Spidal+ // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2024. Т. 27, № 2. С. 37–48. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-2-37-48
6. Никитин А. В., Игнатюгин В. Ю. К вопросу моделирования спироидной передачи // Актуальный потенциал Сибири : материалы 31-й региональной научной студенческой конференции. В 7 ч. Новосибирск, 2023. Ч. 4. С. 417–420.
7. Эбергард В. Е., Игнатюгин В. Ю. Особенности трехмерного моделирования спироидных передач // Фундаментальные и прикладные вопросы транспорта. 2022. № 1 (4). С. 103–106. DOI: 10.52170/2712-9195/2022\_1\_103
8. Фахулзянов М. Р. Проблемы изготовления геометрически точных гиперболоидных зубчатых колес со сложной геометрией // Яковлевские чтения : материалы Всероссийской научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 2024. С. 74–77.



9. Кузьменко Н. Н., Михайлова А. Д. Геометрия и кинематика передачи, состоящей из цилиндрического и квазиглобоидного зубчатых колес // Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля. 2022. № 4 (58). С. 203–208.

10. Расчет траектории дисковой фрезы с трапецеидальной режущей частью для нарезания эвольвентных цилиндрических зубчатых колес на станках с ЧПУ / Р. Ш. Хасанов, А. Р. Абзалов, Р. Х. Асанов, И. М. Гисматуллин // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 9. С. 133–137.

11. Трубаев Е. С. Инновации в технике и технологии передач червячного типа // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2024. Т. 27, № 3. С. 16–25. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-3-16-25

12. Глухов Н. М., Иванов Ю. В. Обработка цилиндрических зубчатых колес по методу зуботочения // Электронный журнал: наука, техника и образование. 2023. № 2 (42). С. 6–9. URL: <https://nto-journal.ru/issues/52/>

13. Малахов Г. В., Судина К. А., Артамонов В. Д. Анализ направлений развития зубонарезания цилиндрических колес методом обката // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. Вып. 3. С. 10–14. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-10-14

14. Викторова А. Sandvik Coromant и OKUMA: синтез восточных и западных технологий // Вестник арматуростроителя 2019. № 7 (56). С. 32–33.

15. Horn: GEAR MACHINING. Expanded tool range for the economical production of gears [Электронный ресурс]. URL: <https://www.sandvik.coromant.com/en-gb/products/pages/gear-milling-tools.aspx> (дата обращения: 10.09.2021).

16. SANDVIK. Gear milling tools [Электронный ресурс]. URL: <https://www.sandvik.coromant.com/en-gb/products/pages/gear-milling-tools.aspx> (дата обращения: 10.09.2021).

17. Шагалов О. Е. Прогрессивные методы зубонарезания // Россия молодая : сборник материалов XI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Кемерово : Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 16–19 апреля 2019 г. С. 300–308.

18. Таналин А. Ш. Прогрессивные технологии изготовления лопаток газотурбинных двигателей // Вестник Казанского государственного технического университета имени А. Н. Туполева. 2020. № 3. С. 50–55.

## References

1. Starzhinskij V.E., Shil'ko S.V., Shalobaev E.V., Kapelevich A.L., Al'gin V.B., Petrokovec E.M. (2021) [Classification of cross-axle transmissions]. Theory and practice of gear transmissions and gearbox engineering: materials of the scientific and practical conference. Izhevsk, pp. 149–178 (in Russ.).

2. Kuz'menko N.N., Mihajlova A.D. (2022) [Geometry and kinematics of a transmission consisting of a cylindrical quasi-globoid gear wheel]. *Vestnik Luganskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Vladimira Dalya*, no. 4, pp. 203–208 (in Russ.).

3. Abkarov A.A. (2021) *Modelirovanie giperboloidnoj zubchatoj peredachi* [Modeling of hyperboloid gear transmission]. SNK-2021: materials of the LXXI open international student scientific conference of Moscow Polytechnic University. Moscow, pp. 37–42 (in Russ.).

4. Gadzhieva R.D., Aliev B.G., Gadzhieva R.D., Aliev B.G. (2020) *Osobennosti tverdotel'nogo komp'yuternogo modeliro-*

*vaniya giperboloidnyh peredach* [Features of solid-state computer modeling of hyperboloid gears]. Actual issues of applied physics and power engineering : materials of the II International scientific conference. Sumgait, pp. 385–388 (in Russ.).

5. Trubachev E.S. (2024) [The Spidal+ software package]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, vol. 27, no. 2, pp. 37–48 (in Russ.).

6. Nikitin A.V., Ignatyugin V.Yu. (2023) [On the issue of modeling spiroid transmission]: The intellectual potential of Siberia : Proceedings of the 31st Regional Scientific Student Conference: in 7 parts. Novosibirsk, Parts 4, pp. 17–420 (in Russ.).

7. Eberhard V.E., Ignatyugin V.Yu. (2022) [Features of three-dimensional modeling of spiroid gears]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy transporta*, no. 1 (4), pp. 103–106 (in Russ.).

8. Fazulzyanov M.R. (2024) [Problems of manufacturing geometrically accurate hyperboloid gears with complex geometry]: Yakovlev readings : Materials of the All-Russian scientific and practical conference. St. Petersburg, pp. 74–77 (in Russ.).

9. Kuzmenko N.N., Mikhailova A.D. (2022) [Geometry and kinematics of transmission consisting of cylindrical and quasi-spherical gears]. *Vestnik Luganskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Vladimira Dalya*, no. 4 (58), pp. 203–208 (in Russ.).

10. Khasanov R.Sh., Abzalov A.R., Asanov R.H., Gismatullin I.M. (2021) [Calculation of the trajectory of a disk cutter with a trapezoidal cutting part for cutting involute cylindrical gears on CNC machines]. *Sovremennye vysokotekhnologichnye tekhnologii*, no. 9, pp. 133–137 (in Russ.).

11. Trubachev E.S. (2024) [Innovations in the technique and technology of worm-type transmissions]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, vol. 27, no. 3, pp. 16–25 (in Russ.).

12. Ivanov Yu.V., Glukhov N.M. (2023) [Processing of cylindrical gears by the tooth-turning method]. *Elektronnyj zhurnal: nauka, tekhnologii i obrazovanie*, no. 2 (42), pp. 6–9 (in Russ.).

13. Malakhov G.V., Sudina K.A., Artamonov V.D. (2023) [Analysis of the directions of development of gear cutting of cylindrical wheels by the rolling method]: Proceedings of Tula State University. Technical sciences: Issue 3, pp. 10–14 (in Russ.).

14. Viktorova A. (2019) [Sandvik Coromant and OKUMA: synthesis of Eastern and Western technologies]. *Vestnik armaturostroitel'ya*, no. 7, pp. 32–33 (in Russ.).

15. Horn: GEAR MACHINING. Expanded tool range for the economic production of gears [Electronic resource]. Available at: <https://www.sandvik.coromant.com/en-gb/products/pages/gear-milling-tools.aspx> (accessed: 10.09.2021).

16. SANDVIK. Gear milling tools [Electronic resource]. Available at: <https://www.sandvik.coromant.com/en-gb/products/pages/gear-milling-tools.aspx> (accessed: 10.09.2021).

17. Shagalov O.E. (2019) *Progressivnye metody narezaniya zubov* [Progressive methods of tooth cutting]. Young Russia: Collection of materials of the XI All-Russian Scientific and Practical conference with international participation. Kemerovo : Kuzbass State Technical University named after T.F. Gorbachev, pp. 300–308 (in Russ.).

18. Tanalin A.S. (2020) [Progressive technologies for manufacturing blades of gas turbine engines]. *Vestnik of Tupolev Kazan National Research Technical University*, no. 3, pp. 50–55 (in Russ.).

**Toothing Kinematics of a Combination Hyperboloid Gear**

A.R. Abzalov, PhD in Engineering, Associate Professor, Tupolev Kazan National Research Technical University - KAI, Kazan, Russia

M.V. Pechenkin, PhD in Engineering, Tupolev Kazan National Research Technical University - KAI, Kazan, Russia

R.Sh. Khasanov, PhD in Economics, Professor, Tupolev Kazan National Research Technical University - KAI; Sergo Plant Production Association, Zelenodolsk, Russia

S.Yu. Yurasov, PhD in Engineering, Associate Professor, Tupolev Kazan National Research Technical University - KAI, Kazan, Russia

*This article examines the potential of gear tooth cutting for a single-sheet hyperboloid of revolution workpiece. The known methods of gear cutting based on a single-sheet hyperboloid of revolution workpiece involve the line-by-line material removal from the stock with a shank tool, that increases the labor intensity of manufacturing significantly. For this reason, such gears have not gained widespread acceptance due to their potential replacement by other transmission types with intersecting axes. This article examines toothing kinematics for gears using a single-sheet hyperboloid of revolution workpiece by means of gear turning. Analytical relationships for tooth shapes for gears produced on a single-sheet hyperboloid of revolution workpieces by means of gear turning are derived. It is shown that for gears with a single-sheet hyperboloid of revolution initial surface shape, the tool-to-gear shaping process is possible only for a given gear ratio, even with the same modulus. For this reason, the tool will have the same number of cutting edges ("plates") as the machined gear to be engaged with. To reduce labor intensity, parametric models of the pitch hyperboloids of the gear being machined and the tool are proposed. Due to the specific tooth geometry of such gears, tooth flank machining is proposed to be performed in two setups. During toothing, the correct position of the cutting edges relative to the gear flank is adjusted using setup bases. It is necessary to develop a rational design for the cutting tool and plate geometry for further study the toothing kinematics, and study the feasibility of tooth shaping on multi-axis CNC machines using simulation and real-life models.*

**Keywords:** hyperboloid gear, gear cutting, gears on a single-sheet hyperboloid of revolution workpiece, toothing, skiving process.

Получено 18.05.2024

**Образец цитирования**

Кинематика зуботочения сборного гиперboloидного зубчатого колеса / А. Р. Абзалов, М. В. Печёнкин, Р. Ш. Хасанов, С. Ю. Юрасов // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2025. Т. 28, № 4. С. 46–55. DOI: 10.22213/2413-1172-2025-4-46-55

**For Citation**

Abzalov A.R., Pechenkin M.V., Khasanov R.Sh., Yurasov S.Yu. (2025) [Toothing Kinematics of a Combination Hyperboloid Gear]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, vol. 28, no. 4, pp. 46-55. DOI: 10.22213/2413-1172-2025-4-46-55 (in Russ.).