

УДК 621.833.38

DOI: 10.22213/2413-1172-2026-1-12-26

## Новая разновидность конической передачи со спиральными зубьями

**Е. С. Трубачев**, доктор технических наук, профессор, Институт механики имени профессора Гольдфарба В. И., ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*Представлена новая разновидность конической зубчатой передачи со спиральными зубьями, образованными с помощью двух разнонаправленных производящих червяков. Описаны метод обработки зубьев с помощью обкаточной резцовой головки и общая последовательность проектирования передачи. Рассмотрены этапы проектирования передач – выбор параметров схемы, выбор параметров формообразования и расчет геометрии зубьев шестерни, расчет виртуального сопряженного зацепления, синтез локализованного контакта. Предложены методики выбора параметров станочных зацеплений для шестерни и колеса и метод расчета активной действующей линии. Определены основные свойства зацепления, а также эксплуатационные и производственные преимущества новой разновидности передачи – возможность обеспечения большего коэффициента перекрытия и плавности работы, наличие эффективных методов управления локализацией контакта и доступность технологии обработки зубьев.*

**Ключевые слова:** коническая зубчатая передача, спиральные зубья, проектирование зубчатой передачи, локализация контакта.

### 1. Введение

Техника и технология конических передач со спиральными (в том числе круговыми) зубьями является одной из наиболее сложных областей зубчатой техники в целом [1]. Известно много схем нарезания зубьев таких передач [2]. Чаще всего речь идет о нарезании торцовыми резцовыми головками с единичным (Facemilling) или непрерывным (Facehobbing) делением. Это возможно при выполнении сложных согласованных движений, обычно реализуемых на специализированных и дорогостоящих станках (рис. 1). Такая техника требует значительных инвестиций во всестороннюю подготовку производства, начиная от оборудования и заканчивая персоналом и программным обеспечением. Имеющиеся на рынке конструкторские и технологические решения являются высокотехнологичными и, соответственно, дорогими и специализированными, ориентированными исключительно на данный тип зубчатых колес (см., например, <https://www.gleason.com> и <https://klingelnberg.com/en/business-divisions/drive-technology/customized-bevel-gears>, <http://www.tmtw.com/en/cate-33158-33907.html>). Это существенно затрудняет внедрение и совершенствование приводов на основе конических передач, особенно в мелкосерийном и многономенклатурном производстве, где доля затрат на подготовку специализированного производства в общей себестоимости продукции может оказаться непомерно большой. Всё это осложняется тем, что отечественная промышленность оказалась в сильной зависимости от зарубежных решений в отношении технологического и программного обеспечения и нормативной базы.

В настоящей статье предлагается новый вариант конических передач со спиральными зубьями, которые образуются с помощью винтовых производящих поверхностей. Для производства таких передач необходимо распространенное оборудование и относительно простые режущие инструменты – обкаточ-

ные резцовые головки. Рассмотрены, в частности: способ обработки зубьев, последовательность проектирования, геометрические зависимости и свойства передач новой разновидности, локализованного контакта в них и обеспечения плавности работы.

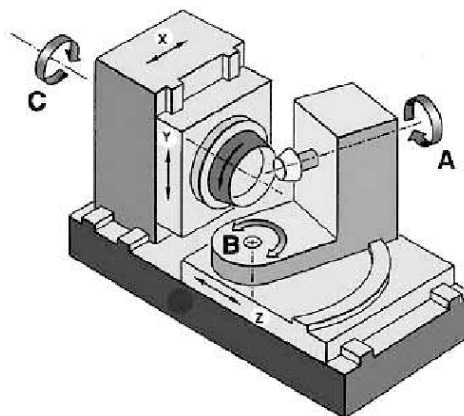


Рис. 1. Схема станка для нарезания спиральных традиционных конических колес (<https://www.semanticscholar.org/paper/Technological-Setups-of-the-Gleason-Phoenix-CNC-and-Skawinski/8465ab75f76b8f691f38fd861ec0e46aad65e2a1>)

Fig. 1. Scheme of a machine for cutting traditional spiral bevel gearwheels

### 2. Новая версия скайвинга (зуботочения)

Идея нового метода формообразования [3] исходит из того, что спиральные зубья естественным образом получаются на плоском или почти плоском зубчатом колесе в его ортогональном зацеплении с производящим червяком – в уже достаточно хорошо известной спироидной передаче. Два конических колеса с разнонаправленными зубьями, сформированные как спироидные в неортогональном станочном зацеплении, образуют коническую передачу нового типа. Фактически производящие червяки колес реализуются через обкаточные резцовые

головки [4, 5], которые наследуют также известные ранее инструменты: летучие и обкаточные резцы, применяющиеся для нарезания колес червячного типа при разовых партиях или единичном производстве.

Предложенный метод реализует непрерывное деление и основан на использовании двух обкаточных резцовых головок, каждая из которых применяется в отдельности для нарезания шестерни и колеса. В основу конструкции головки положена укороченная часть производящего червяка. На торцах витков выполнены слоты для режущих пластин. В процессе резания головка совершает два движения, согласо-

ванных с вращением заготовки: вращение вокруг оси и подача преимущественно вдоль оси. При этом режущие лезвия образуют винтовые образующие поверхности постоянного или переменного шага, причем для шестерни и колеса применяются винтовые поверхности разных (правого и левого) направлений. По набору движений и конструктивному оформлению инструмента метод нарезания во многом аналогичен скайвингу (зуботочению), популярному в нарезании внутренних косых зубьев цилиндрических зубчатых колес. Метод реализуется на зубофрезерных станках и на вертикальных обрабатывающих центрах (рис. 2).

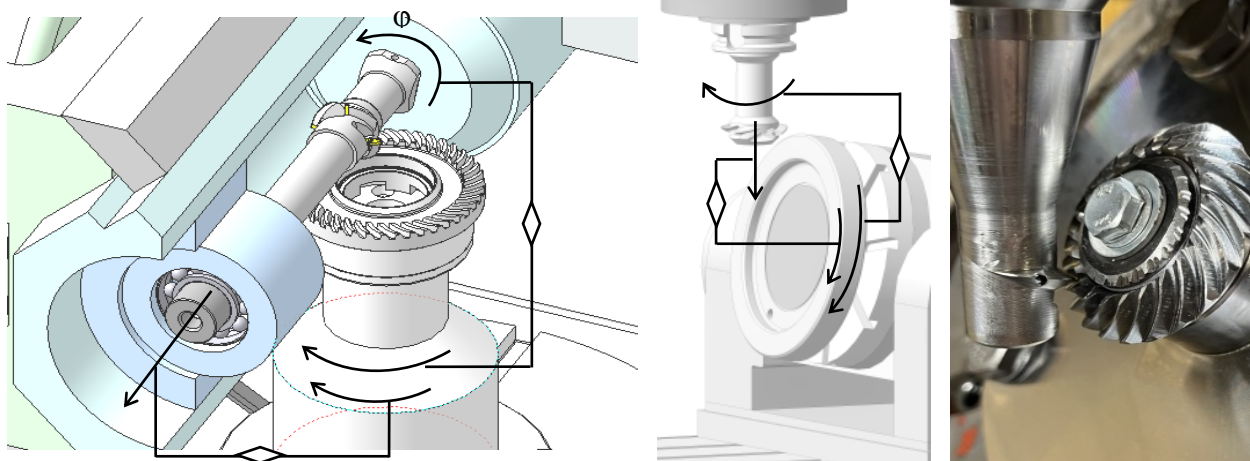


Рис. 2. Нарезание спиральных зубьев обкаточной резцовой головкой на зубофрезерном станке (слева) и вертикальном обрабатывающем центре (справа)

Fig. 2. Cutting spiral teeth with a run-in-cutter head on a milling machine (left) and a vertical machining center (right)

Технология позволяет производить финишную обработку закаленных зубьев, обеспечивает высокую производительность (колесо диаметром 175 мм можно нарезать примерно за 5 мин) и шероховатость (вполне достижимы шероховатости  $R_a$  1,25...1,6 мкм при обработке зубьев до закалки и 0,20...0,30 мкм после нее). При этом обеспечивается эффективный контроль получаемого пятна контакта, гибкость

и простота реализации по сравнению с традиционными методами обработки криволинейных зубьев. Кроме того, метод позволяет нарезать зубья на колесах со ступицей со стороны венца или обратноконических колесах (например, для прецессионных передач [6]).

Внешне передачу из колес, нарезанных таким способом, трудно отличить от традиционной конической передачи со спиральными зубьями (рис. 3).

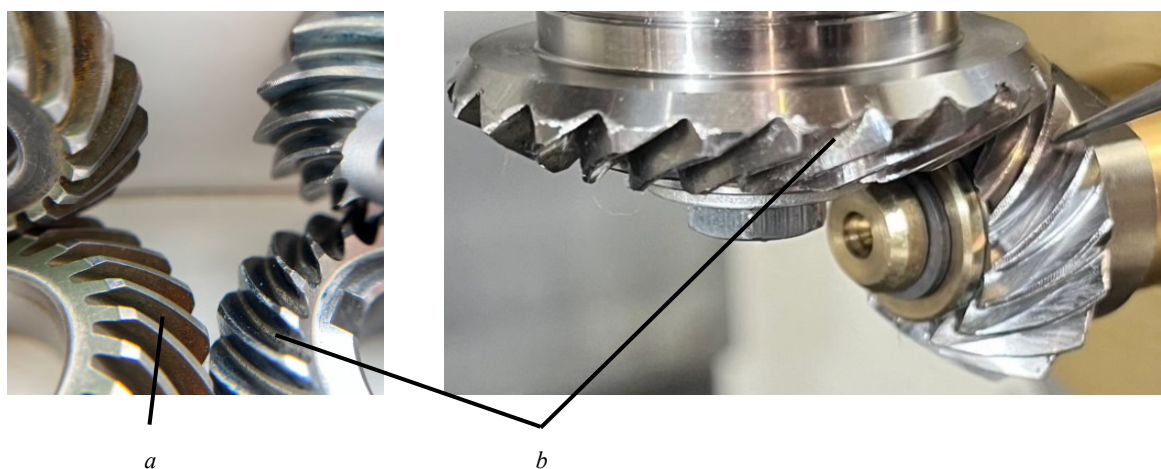


Рис. 3. Внешний вид конических передач со спиральными зубьями: а – традиционная передача; б – предлагаемая передача

Fig. 3. External view of bevel gears with spiral teeth: a - traditional gear; b - proposed gear

### 3. Некоторые замечания общего плана

3.1. В качестве модуля передачи выбирается осевой модуль  $m_{x1}$  производящего червяка шестерни, проектируемой первой (см. п. 4). Модуль производящего червяка колеса обычно немного отличается от модуля червяка шестерни, чтобы обеспечить требуемую модификацию зубьев (см. п. 9).

3.2. Средний угол наклона линии зуба (угол спирали) в предлагаемых передачах естественным образом получается обычно несколько большим,

чем в традиционных конических передачах со спиральными зубьями –  $30...55^\circ$ , причем большие углы соответствуют большим передаточным отношениям (в диапазоне 1...5). Главные факторы здесь – угол  $\gamma_0$  подъема витка производящего червяка и отношение диаметра нарезаемого колеса к станочному межосевому расстоянию  $a_{w0}$ . На рисунке 4 показан пример влияния этих параметров для одного и того же конического колеса с углом начального конуса  $34^\circ$ .

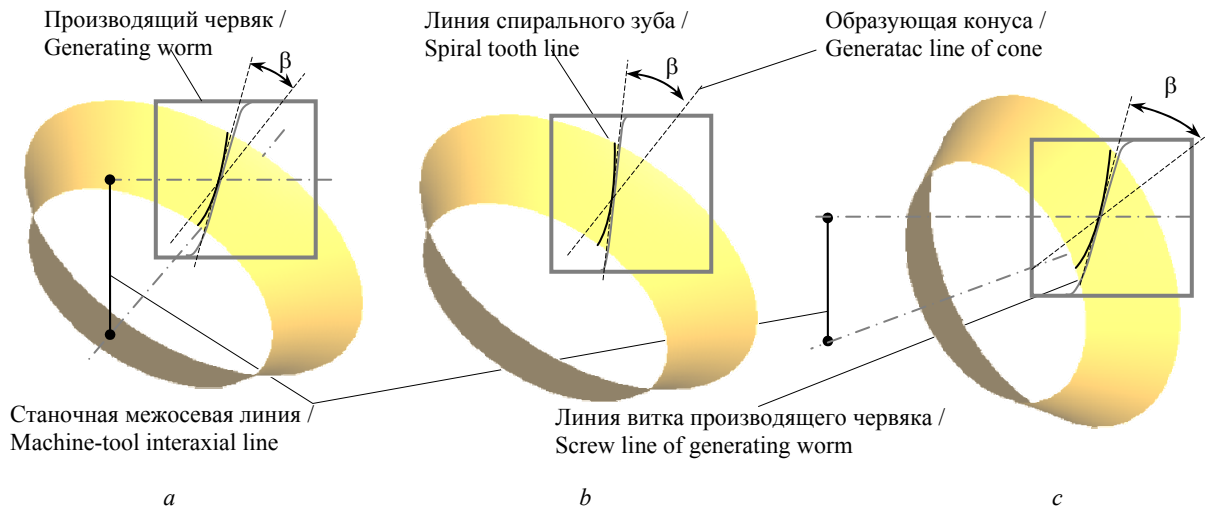


Рис. 4. Влияние станочного межосевого расстояния и угла подъема витка производящего червяка на угол наклона линии зуба:  $a$  – большое  $a_{w0}$ , большой  $\gamma_0$ ;  $b$  – малый  $\gamma_0$ ;  $c$  – малое  $a_{w0}$

Fig. 4. The influence of the machine-tool interaxial distance and the helix angle of the generating worm on the spiral angle:  $a$  - large  $a_{w0}$ , large  $\gamma_0$ ;  $b$  - small  $\gamma_0$ ;  $c$  - small  $a_{w0}$

3.3. В предлагаемой разновидности передачи разумно выполнять зубья равновысокими (осевая форма III по ГОСТ 19325–73). При этом поверхность впадин имеет вогнутый профиль (рис. 5), причем тем

более вогнутый, чем ближе производящий червяк к станочной межосевой линии (ср. рис. 4,  $a$  и 4,  $b$ ). Это естественным образом ограничивает получение меньших углов спирали.

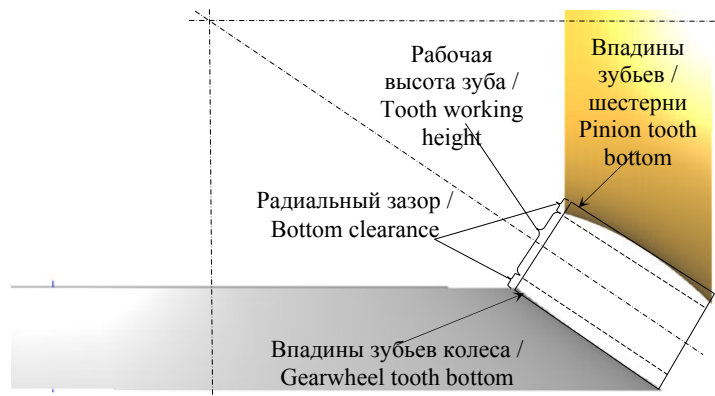


Рис. 5. Влияние вогнутого профиля впадин на радиальный зазор

Fig. 5. The effect of the concave bottom profile on the radial clearance

3.4. Предлагаемая передача не имеет общего для колес производящего элемента (рейки или производящего колеса), поэтому смещение применяется для одного из звеньев передачи – шестерни по аналогии с червячными передачами. Увеличение коэффициента смещения приводит к смещению начальной линии

к вершинам зубьев шестерни и уменьшению диаметра ее вершин (рис. 6).

3.5. В отличие от обычной конической передачи для лучшего управления геометрией зубьев предлагается различать начальные конусы и аксоиды (рис. 6).

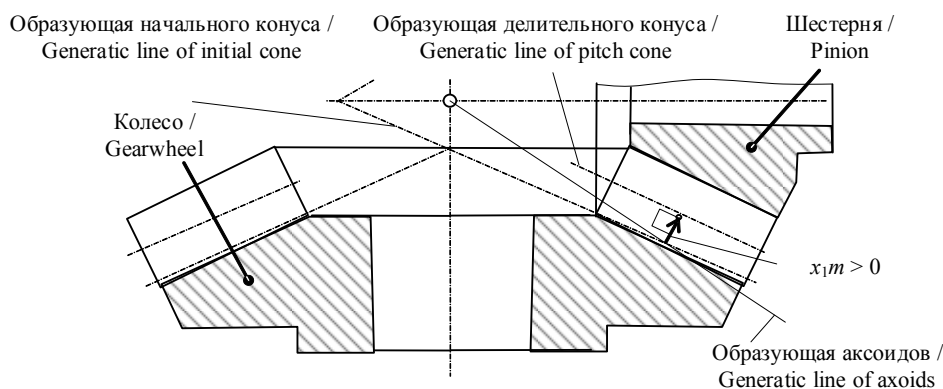


Рис. 6. Смещение  $x_{1m}$  шестерни в предлагаемой передаче

Fig. 6. Shift  $x_{1m}$  of the gear in the proposed gear

**4. Общая схема расчета передачи**

Рассматриваемая коническая передача проектируется как приближенная, работающая с небольшой погрешностью зубцовой частоты, получение допустимой величины которой является одной из главных задач расчета. Для современных передач эта задача может быть решена только с использованием САД-систем ([https://www.gleason.com/ru/products/design-simulation-products/design-simulation/design-simulation/design-simulation/design-simulation](https://www.gleason.com/ru/products/design-simulation-products/design-simulation/design-simulation/design-simulation), см. также [7–9]).

Последовательность автоматизированного проектирования может быть следующей:

1. Выбор схемы передачи.
2. Выбор и расчет параметров геометрии зубьев шестерни.
3. Расчет геометрии сопряженных боковых поверхностей зубьев колеса.

4. Расчет характеристик виртуальной сопряженной передачи.

5. Расчет параметров формообразования зубьев колеса.

В значительной мере представленная последовательность наследует декомпозицию процесса автоматизированного проектирования передачи червячного типа, предложенную профессором В. И. Гольдфарбом [10], а также соответствует подходу к выбору станочных наладок, предложенному профессором М. Г. Сегалем для конических и гипоидных передач с круговыми зубьями [11].

**5. Расчет схемы передачи**

Из-за возможного несовпадения аксоидов и начальных поверхностей условие равенства нулю скорости скольжения выполняется не по всей линии касания начальных конусов, а лишь в точке  $M_{wm}$  (рис. 7).

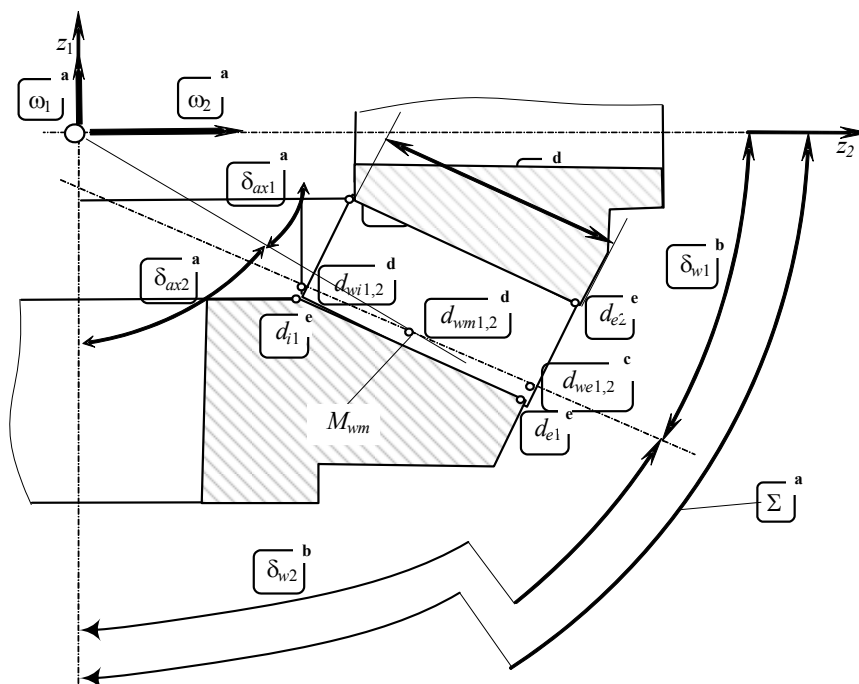


Рис. 7. Последовательность определения параметров схемы передачи

Fig. 7. The sequence of determining gearscheme parameters

Из-за возможного несовпадения аксоидов и начальных поверхностей условие равенства нулю скорости скольжения выполняется не по всей линии касания начальных конусов, а лишь в точке  $M_{wm}$  (см. рис. 7).

Последовательность назначения/выбора/расчета параметров схемы, отраженная на рисунке 7, следующая:

а) межосевой угол  $\Sigma$ , передаточное отношение  $i$  (частоты вращения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  или числа  $z_{(1)}$  и  $z_{(2)}$  зубьев шестерни и колеса соответственно); это определяет углы  $\delta_{ax1}$  и  $\delta_{ax2}$  аксоидов, учитывая, что  $\delta_{ax1} + \delta_{ax2} = \Sigma$  и  $i = \sin\delta_{ax2} / \sin\delta_{ax1}$  (здесь и далее нижние индексы 1 и 2 означают отношение параметра к шестерне или колесу соответственно, а сочетание 1, 2 – и к шестерне, и к колесу);

б) углы начальных конусов  $\delta_{w1}$  и  $\delta_{w2}$  ( $\delta_{w1} + \delta_{w2} = \Sigma$ ). Углы  $\delta_{ax1}$  и  $\delta_{ax2}$  являются отсчетными, различие между этими парами углов невелико – не более  $2...7^\circ$ ;

в) внешний начальный диаметр  $d_{we2}$  колеса, определяющий размер передачи;

г) ширина венца  $b$ ; средние ( $d_{wm2}$ ,  $d_{wm1}$ ), внутренние ( $d_{wi2}$ ,  $d_{wi1}$ ) начальные диаметры колеса и шестерни и внешний начальный диаметр ( $d_{we1}$ ) шестерни;

е) внутренние ( $d_{ai2}$ ,  $d_{ai1}$ ) и внешние ( $d_{ae2}$ ,  $d_{ae1}$ ) диаметры вершин колеса и шестерни и смещения этих точек от точки пересечения осей передачи.

Для определения перечисленных параметров на шаге е) необходим модуль  $m_{x1}$  производящего червяка шестерни, неизвестный на этапе выбора схемы передачи. Можно задаться предварительным значением:

$$\begin{aligned} m_{x1pr} &= m_{m1} \cos\beta_{pr} / \cos\gamma_{1pr} = \\ &= \left( d_{wm2} / z_{(2)} \right) \cos\beta_{pr} / \cos\gamma_{1pr}, \end{aligned} \quad (1)$$

где обозначение  $pr$  означает предварительное значение угла наклона линии зуба  $\beta_{pr} = 40^\circ$  и угла подъема витка производящего червяка шестерни  $\gamma_1 = 10^\circ$ .

## 6. Расчет параметров наладки и геометрии шестерни

### 6.1. Выбор параметров схемы формообразования

Принципиально схемы формообразования зубьев шестерни и колеса совпадают со схемой неортогональной спироидной передачи [12]. Обратим внимание на особенности. Поскольку параметры станочной наладки шестерни выбираются первыми, в этом выборе имеется большая свобода. По сути к поверхности впадин зубьев нужно пристроить (обеспечить касание) поверхность вершин производящего червяка.

На рисунке 8 показана схема станочного зацепления и применяемые системы координат. Станочное межосевое расстояние  $a_{w01}$  может быть найдено решением системы из 4 уравнений:

- условие касания соосных поверхностей звеньев:

$$xz + ya_{w01} \operatorname{ctg} \Sigma_{01} = 0; \quad (2)$$

- равенство радиуса червяка заданному:

$$x^2 + y^2 - r_{a01}^2 = 0; \quad (3)$$

- равенство радиуса шестерни среднему радиусу впадин шестерни  $r_{1fm}$ :

$$(x + a_{w01})^2 + (z \sin \Sigma_{01} - y \cos \Sigma_{01})^2 - r_{1fm}^2 = 0; \quad (4)$$

- равенство угла конуса шестерни заданному – через угол между нормалью  $\mathbf{n}_{a1}$  к цилиндру вершин и осью шестерни (орт  $\mathbf{k}_1$ ) в точке касания:

$$\cos \delta_{w1} = (\mathbf{n}_{a1} \cdot \mathbf{k}_1) / |\mathbf{n}_{a1}| = (y / r_{a01}) \sin \Sigma_{01}. \quad (5)$$

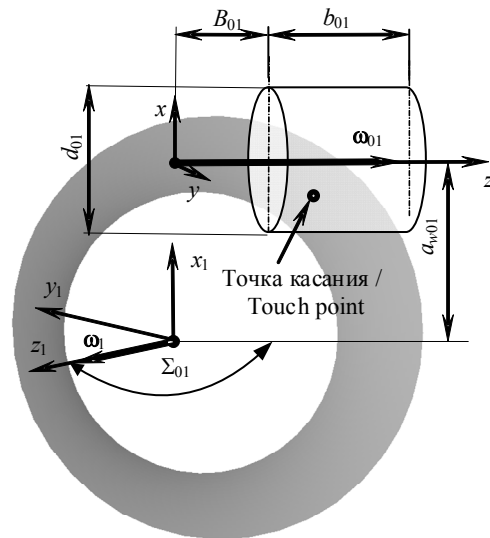


Рис. 8. Схема станочного зацепления для конической шестерни

Fig. 8. The scheme of machine meshing for the pinion

Число заходов  $z_{(01)}$  желательно выбирать кратным 2 или 3 для равномерного размещения режущих пластин, обрабатывающих разноименные поверхности зубьев и дно впадины; также желательно, чтобы оно не имело общих множителей с числом зубьев шестерни. Выбор радиуса  $r_{a01}$  ограничивается снизу возможностью компоновки режущей головки, а сверху – нежелательным профильным направлением локализованного пятна контакта и активной действующей линии. Межосевой угол предварительно можно определять по эмпирической зависимости  $\Sigma_{01} = 162^\circ - 0,8\delta_{w1}$ , а далее – корректировать в зависимости от желаемого угла наклона линии зуба (см. ниже (7) и рис. 9).

Согласно ГОСТ 16530–83 в точке касания начальных поверхностей передачи на скрещивающихся осях (здесь – станочного зацепления) вектор относительной скорости должен быть коллинеарен общей касательной к линиям зубьев. Следовательно, модуль производящего червяка должен быть близким к отсчетному значению  $m_{x1ref}$ , которое оценивается исходя из условия [13]

$$m_{1ref} = \frac{2r_{a01}^2 (x + a_{w01}) \sin \Sigma_{01}}{z_{(01)} [r_{a01}^2 (i_{01} - \cos \Sigma_{01}) - z \sin \Sigma_{01} - x a_{w01} \cos \Sigma_{01}]}, \quad (6)$$

где  $i_{01} = u_{01} = z_{(1)}/z_{(01)}$  – станочное передаточное отношение;  $z_{(01)}$  – число заходов производящего червяка, а декартовы координаты определяются решением (2)–(5) при подстановке начального радиуса  $r_{1wm}$  шестерни взамен  $r_{1fm}$ . По опыту проектирования можно рекомендовать выбор  $m_{x1} = (0,9 \dots 1,05)m_{x1ref}$ .

В отношении выбора числа заходов  $z_{(01)}$  имеются противоречивые пожелания:

- уменьшать эту величину, поскольку это дает лучшую чистоту поверхностей и лучшее согласование движений на применяемых для нарезания станках;

- $i = 1,933 (29:15)$ ;
- $d_{we2} = 140$  мм;
- $b = 20$  мм;
- $d_{ax1} = 27,3^\circ$ ;
- $\delta_{w1} = 25,0^\circ$ ;
- $x_1 = 0,0$ .

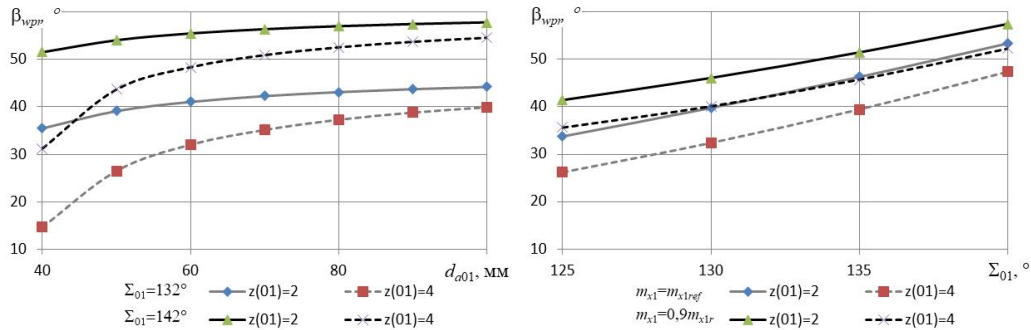


Рис. 9. Основные зависимости для угла наклона линии (угла спирали) зубьев

Fig. 9. The main dependences for the spiral angle

6.2. Выбор параметров профиля производящего червяка

Режущие кромки резцов головки при движении подачи воспроизводят винтовые поверхности конволютного производящего червяка вида ZN1 по ГОСТ 18498–89, SZN1 или SZC1 по ГОСТ 22850–77. Уравнения семейства производящих поверхностей образующегося при вращении червяка:

$$\begin{cases} x = r \cos(\vartheta + \varphi_1), \\ y = r \sin(\vartheta + \varphi_1), \\ z = f(r) + p_\gamma \theta, \end{cases} \quad (8)$$

где  $r$  (радиус относительно оси  $z$ ) и  $\theta$  (полярный угол) – криволинейные координаты поверхности;  $p_\gamma = m_{x1}z_{(01)} / 2$  – винтовой параметр;  $\varphi_0$  – угол поворота червяка;  $f(r)$  – подходящая функция для описания осевого профиля червяка. В случае переменного отношения подачи и дополнительного поворота нарезаемого колеса образуется червяк с переменным винтовым параметром. При его линейном изменении вдоль оси червяка последнее уравнение в (8) меняется:

$$z = z_0 + f(r) + p_{\gamma_0}(\theta - \theta_0) + 0,5k_p(\theta - \theta_0)^2, \quad (9)$$

где  $z_0$  – средняя аппликата производящего червяка, при которой он имеет отсчетные значения винтового

- увеличивать ее, поскольку это дает возможность разместить большее число режущих пластин, рационально разделяя между ними удаляемый материал.

Кроме того, выбор  $z_{(01)}$  влияет на картину модификаций зубьев колеса.

При выбранных  $m_{x1}$  и  $z_{(01)}$  можно оценить предварительное значение  $\beta_{wpr}$ :

$$\cos \beta_{pr} = m_{x1} z_{(2)} \cos \gamma_{w1} / d_{wm2}, \quad (7)$$

где  $\gamma_{w1}$  – начальный угол подъема производящего червяка.

На рисунке 9 показано влияние параметров  $d_{a01}$ ,  $\Sigma_{01}$ ,  $z_{(01)}$  и  $m_{x1}$  на угол  $\beta_{wpr}$  в передаче со следующими основными параметрами:

( $p_{\gamma_0} = m_{x10}z_{(01)}/2$ ) и углового ( $\theta_0 = z_0/p_{\gamma_0}$ ) параметров;  $k_p$  – коэффициент изменения винтового параметра ( $p_\gamma = p_{\gamma_0} + k_p(\theta - \theta_0)$ ).

6.2. Боковая поверхность зуба шестерни

Точки контакта производящего червяка и колеса находятся из уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \mathbf{v}_{01} = f_{301}(x, y, z, r) = 0, \\ x^2 + y^2 = r^2, \end{cases} \quad (10)$$

где первое уравнение – уравнение зацепления;  $\mathbf{v}_{01}$  – вектор относительной скорости в системе координат  $S(x, y, z)$  (рис. 8) [14]:

$$\begin{cases} v_{01x} = -y - (z \sin \Sigma_{01} - y \cos \Sigma_{01}) / i_{01}, \\ v_{01y} = x - (x + a_{w01}) \cos \frac{\Sigma_{01}}{i_{01}}, \\ v_{01z} = (x + a_{w01}) \sin \Sigma_{01} / i_{01}. \end{cases} \quad (11)$$

Проекция нормали  $\mathbf{n}_0$  к (8), (9) [4]:

$$\begin{cases} n_x = -yp_\gamma + x r \tan \alpha_x, \\ n_y = xp_\gamma + y r \tan \alpha_x, \\ n_z = -r^2, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha_x$  – осевой угол профиля производящего червяка ( $\operatorname{tg}\alpha_x = f'(r)$ ).

Решение системы (10) – координаты точек контакта – нужно преобразовать к системе координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 8) и далее – к системе  $S_{c1}(x_{c1}, y_{c1}, z_{c1})$ , жестко связанной с вращающейся шестерней, таким образом определяются точки боковых поверхностей ее зубьев. Эти поверхности удобно представлять в виде регулярной сетки точек [15], получаемой сечениями зуба конусами, эквидистантными начальному и среднему дополнительному (рис. 10), т. е. в виде наборов (массивов) точек  $h_{1i}, l_{1j}, \theta_{1ij}$ , где  $h_1, l_1$  и  $i, j$  – координаты и номера точки по высоте и длине зуба соответственно,  $\theta_1 = \operatorname{arctg}(y_1/x_1)$  – полярный угол. При этом

$$l_1 = -(z_1 - z_{1Oh}) \cos \delta_{w1} + (r_1 - r_{1Oh}) \sin \delta_{w1}; \quad (13)$$

$$h_1 = (z_1 - z_{1Oh}) \sin \delta_{w1} + (r_1 - r_{1Oh}) \cos \delta_{w1} / \left( 1 + \frac{l}{h_a^*} \operatorname{tg} \delta_a \right), \quad (14)$$

где  $r_{1Oh}, z_{1Oh}$  – координаты начала отсчета координат  $h_1$  и  $l_1$  в системе  $r_1, z_1$ .

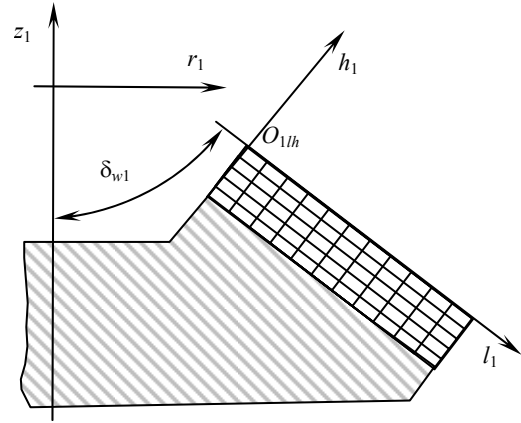


Рис. 10. Регулярная сетка точек зуба шестерни

Fig. 10. Regular grid of gear tooth points

В предлагаемой передаче часто имеется некоторое подрезание вогнутых поверхностей зубьев. С одной стороны, оно несколько уменьшает активные поверхности зубьев, с другой – его наличие и степень позволяют управлять продольной локализацией контакта (рис. 11).

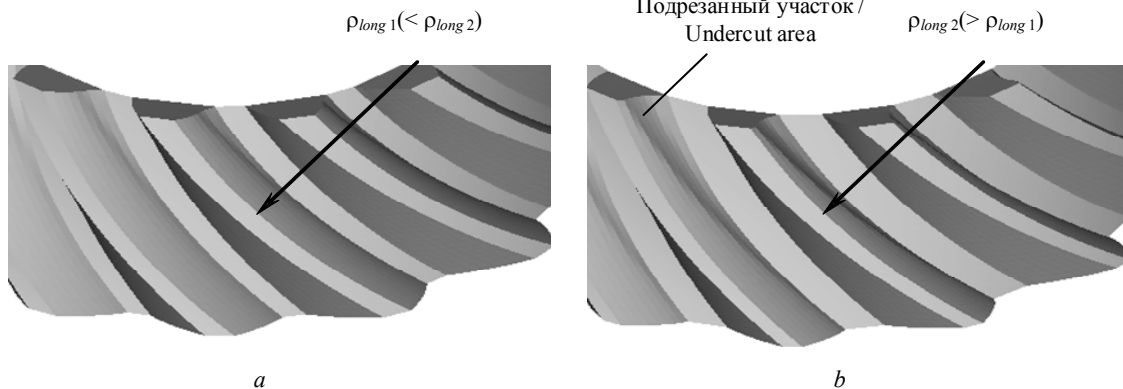


Рис. 11. Влияние подрезания на продольную кривизну вогнутой поверхности зуба: а – нет подрезания; б – есть подрезание

Fig. 11. The effect of undercutting on the longitudinal curvature of the concave side: a - without undercutting; b - with undercutting

Оценить углы профиля производящего червяка, при которых появляется подрезание, можно по методике, изложенной в [16], а расчет фактически подрезанных участков – применяя формулы (8)–(13) и считая вершинную кромку производящего червяка каналовой винтовой поверхностью малого радиуса [17].

**7. Расчет сопряженных поверхностей колеса**

Неподвижные и вращающиеся совместно (жестко связанные) со звеньями передачи системы координат, применяемые в расчете, показаны на рисунке 12.

Предполагается, что, имея решение системы (10), можно получить аппроксимацию поверхности зуба шестерни в цилиндрических координатах в виде  $\theta_1 = \theta_1(r_1, z_1)$ , необходимую для восстановления вектора нормали и производных, как минимум, до второго порядка включительно, требующихся в дальнейших

расчетах. Учитывая (13), параметрическое уравнение семейства поверхностей шестерни, образующееся в результате ее вращения,

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta(h(r_1, z_1), l(r_1, z_1)) + \varphi_1, \\ y_1 = r_1 \sin \theta(h(r_1, z_1), l(r_1, z_1)) + \varphi_1, \\ z_1, \end{cases} \quad (14)$$

Нормаль к поверхности (14) через производные  $r_{r1}, r_{z1}$  радиус-вектора (14)

$$n_1(r_1, z_1, \varphi_1) = r_{r1} \times r_{z1}. \quad (15)$$

При вращении шестерни для  $ij$ -й точки ее зуба неизменными остаются векторы-компоненты  $n_1$  – радиальный ( $r_r = \{x_1/r_1, y_1/r_1, 0\}$ ), тангенциальный ( $t = \{-y_1/r_1, x_1/r_1, 0\}$ ) и осевой ( $k_1 = \{0, 0, 1\}$ ) [4]:

$$\mathbf{n}_{1z} = n_{1z1} \mathbf{k}_1; \mathbf{n}_{1t} = (\mathbf{n}_1 \mathbf{t}) \mathbf{t}; \mathbf{n}_{1r} = (\mathbf{n}_1 \mathbf{r}_r) \mathbf{r}_r; \quad (16)$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1t} + \mathbf{n}_{1r} + \mathbf{n}_{1z} : \begin{cases} n_{1x1} = (-y_1 n_{1t} + x_1 n_{1r}) / r_1, \\ n_{1y1} = (x_1 n_{1t} + y_1 n_{1r}) / r_1, \\ n_{1z1} = n_{1z1}. \end{cases} \quad (17)$$

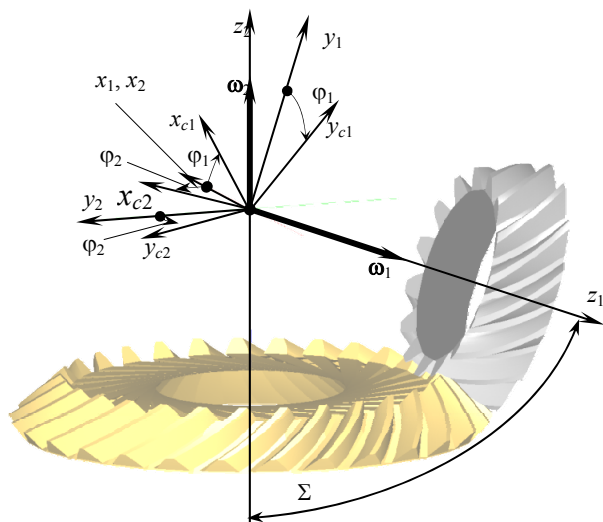


Рис. 12. Системы координат, применяемые при расчете передачи

Fig. 12. Coordinate systems used by the gear calculation

Тогда уравнение зацепления шестерни и колеса, аналогично (10),

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \mathbf{v}_{12} = f_{s12}(x_1, y_1, z_1, r_1) = 0, \\ x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \end{cases} \quad (18)$$

где скорость скольжения  $\mathbf{v}_{12}$  (аналогично (11), но при  $a_w = 0$ )

$$\begin{cases} v_{12x} = -y_1 - (z_1 \sin \Sigma - y_1 \cos \Sigma) / i, \\ v_{12y} = x_1 (1 - \cos \Sigma) / i, \\ v_{12z} = x_1 \sin \Sigma / i. \end{cases} \quad (19)$$

Система (18) сводится к квадратному уравнению для каждой  $ij$ -й точки, решение которого дает координаты  $x_{1ij}, y_{1ij}$  точек сопряженного контакта шестерни и колеса в неподвижной системе координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и после простых преобразований – точки сопряженной поверхности зуба колеса в системе координат  $S_{2c}(x_{2c}, y_{2c}, z_{2c})$ , жестко связанной с вращающимся колесом:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 / i; \\ x_{2cij} &= x_1 \cos \varphi_2 + (y_1 \cos \Sigma - z_1 \sin \Sigma) \sin \varphi_2; \\ y_{2cij} &= -x_1 \sin \varphi_2 + (y_1 \cos \Sigma - z_1 \sin \Sigma) \cos \varphi_2 m; \\ z_{2cij} &= y_1 \sin \Sigma + z_1 \cos \Sigma; \\ r_{2cij} &= \sqrt{x_{2cij}^2 + y_{2cij}^2}; \\ \vartheta_{2cij} &= \arctg(y_{2cij} / x_{2cij}). \end{aligned} \quad (20)$$

Полученная таким образом сетка точек оказывается нерегулярной в параметрах высоты и длины зуба. Регулярную сетку можно найти с помощью приемов, аналогичных описанным выше (13), применяя их для колеса.

Типовые ограничения при расчете поверхностей зубьев шестерни и колеса – размеры подрезанных участков и заострение зубьев и витков производящего червяка (режущих пластин обкаточной резцово-головки) (см. рис. 13).

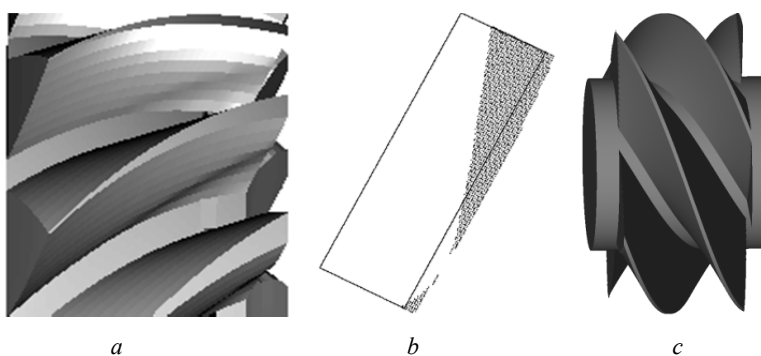


Рис. 13. Типовые ограничения при расчете геометрии зубьев: а – заострение и подрезание на 3D-модели; б – подрезанный участок на осевой проекции зуба; с – заострение витка производящего червяка

Fig. 13. Typical limitations in the calculation of tooth geometry: a - sharpened and undercut tooth in 3D-model; b - undercut area in tooth axial projection; c - sharpened threads of generating worm

## 8. Расчет показателей виртуальной сопряженной передачи

### 8.1. Геометро-кинематические показатели

При решении (14) и (18) и варьировании одной из координат  $r_1$  или  $z_1$  можно получить набор точек контакта сопряженных поверхностей точек для выбранного угла  $\varphi_1$  поворота шестерни – линию сопряженного контакта. В каждом положении шестерни

обычно оказывается несколько линий с различием параметра  $\varphi_1$  на величину  $2\pi/z_{(1)}$ ; это говорит о высоком коэффициенте перекрытия передачи и, соответственно, потенциально хорошей плавности работы. На рисунке 14 в качестве примера показаны линии сопряженного контакта в передаче, охарактеризованной выше, при  $\beta_w = 30^\circ$  и  $\beta_w = 45^\circ$  (здесь и далее приводятся примеры для выпуклой поверхности зуба колеса).

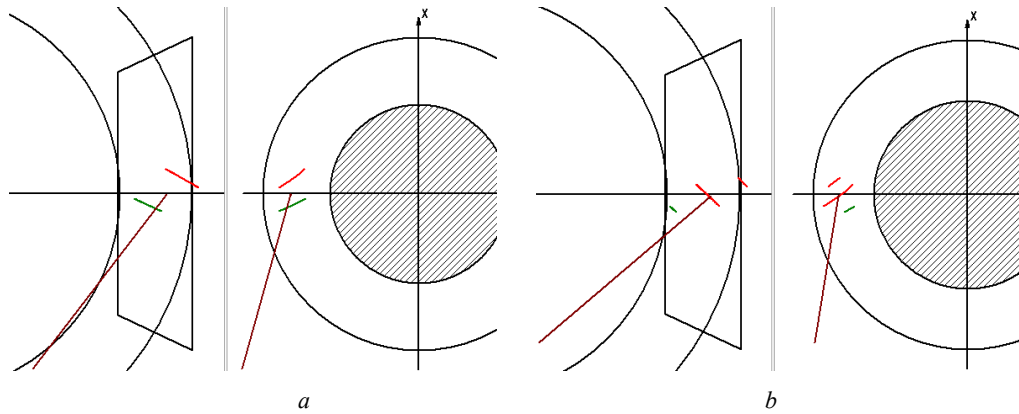


Рис. 14. Линии сопряженного контакта: а –  $\beta_w = 30^\circ$ ; б –  $\beta_w = 45^\circ$

Fig. 14. Conjugate contact lines: а -  $\beta_w = 30^\circ$ ; б -  $\beta_w = 45^\circ$

Типовые показатели контакта в точках найденных линий:

- суммарная длина контактных линий – сумма расстояний между их точками;
- скорость скольжения (относительная скорость) – вычисляется по (19);
- угол между касательной к линии контакта (с хорошим приближением, отрезком, соединяющим соседние точки линии) и вектором скольжения (19);
- скорости  $\mathbf{v}_r$  общей точки (точки контакта) по поверхностям зубьев звеньев;
- приведенный нормальный радиус  $\rho_{пр}$  кривизны в контакте поверхностей.

Выражения для расчета последних двух показателей относительно громоздки, но хорошо известны; можно, например, воспользоваться методом, описанным в Litvin F. L., Fuentes A. (2004) Gear Geometry and Applied Theory с необходимой для реализации полнотой, имея в виду (18).

#### 8.2. Силовые и нагрузочные показатели

В основу расчета сил в зацеплении и КПД передачи положен метод, изложенный в [18]. Равнодействующая  $F_\Sigma$  при моменте  $T_2$  на колесе передачи

$$F_\Sigma = T_2 / (r_2 \mathbf{e}_F \mathbf{e}_{t2}), \quad (20)$$

где  $r_2$  – радиус рассматриваемой точки контакта относительно оси колеса;  $\mathbf{e}_{t2}$  – орт окружной скорости колеса;  $\mathbf{e}_F$  – орт равнодействующей силы в зацеплении,

$$\mathbf{e}_F = \frac{\mathbf{n}/|\mathbf{n}| + f \mathbf{e}_{v12}}{\sqrt{1 + f^2}}, \quad (21)$$

где  $f$  – коэффициент трения;  $\mathbf{e}_{v12}$  – орт скорости скольжения (19).

Осевые, окружные, радиальные проекции силы  $F_\Sigma$ , соответственно,

$$F_{a1,2} = F_\Sigma \mathbf{k}_{1,2}; \quad F_{t1,2} = F_\Sigma \mathbf{e}_{t1,2}; \quad F_{r1,2} = F_\Sigma \mathbf{e}_{r1,2}. \quad (22)$$

Равномерно распределенное герцевское контактное напряжение  $\sigma_H$  в сопряженной передаче можно найти из выражения [19]

$$T_2 = \sum_{i=1}^I \int_{li} dT_2 \approx \approx \alpha_h \pi \sqrt{1 + f^2} \sigma_H^2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} \rho_{пр} r_{2j} (\mathbf{e}_{Fj} \mathbf{e}_{t2j}) \Delta l_j, \quad (23)$$

где  $i, I$  – номер контактной линии и их число;  $j, J_i$  – номер контактной точки и их число в  $i$ -й линии;  $\alpha_h = (1 - \mu_1^2)/E_1 + (1 - \mu_2^2)/E_2$  – упругая постоянная для пары материалов звеньев ( $\mu_{1,2}$ ,  $E_{1,2}$  – коэффициент Пуассона и модуль Юнга);  $\rho_{пр}$  – приведенный радиус кривизны;  $\Delta l$  – длина участка контактной линии. Пример сравнительной оценки двух вариантов передачи (см. п. 6.1) дан в таблице.

#### Пример сравнения показателей двух вариантов передачи An example of comparing the characteristics of two gear versions

Параметр	$\beta_w = 30^\circ$	$\beta_w = 45^\circ$
Средняя суммарная длина контактных линий, мм / Average total length of contact lines, mm	19,81	18,90
Средняя скорость скольжения при $n_1 = 1400$ об/мин, м/с / Average sliding speed at $n_1 = 1400$ rpm, m/s	0,523	0,386
Средний приведенный радиус кривизны, мм / Average reduced radius of curvature, mm	16,94	21,19
Герцевское контактное напряжение*, МПа / Hertz contact pressure*, MPa	1531	1541
Осевая сила, действующая на шестерню*, Н / Axial force acting on the pinion*, N	12450	19140
Радиальная сила, действующая на шестерню*, Н / Radial force acting on the pinion*, N	4750	2880
Осевая сила, действующая на колесо*, Н / Axial force acting on the gearwheel*, N	4310	2640
Радиальная сила, действующая на колесо*, Н / Radial force acting on the gearwheel*, N	12220	19020

Примечание: \* – при  $T_2 = 1000$  Нм / by  $T_2 = 1000$  Nm

#### 9. Расчет параметров станочной наладки для колеса

Задачу расчета параметров нарезания колеса можно разделить на два подэтапа:

- 1) собственно выбор и расчет параметров наладки;
- 2) оценка локализованного контакта в передаче.

9.1. Выбор и расчет параметров наладки

Математическая модель для этой задачи рассмотрена в Trubachev E.S. (2020) On possibility of cutting bevel gearwheels by hobs. Здесь дадим общую постановку и основные применяемые зависимости. Схема и основные параметры наладки для колеса совпадают с теми же для шестерни (рис. 8). К найденной сопряженной (отсчетной) поверхности зуба колеса нужно надлежащим образом «пристроить» производящий червяк, т. е. в двух расчетных точках разномименных отсчетных поверхностей обеспечить выполнение трех условий:

$$\mathbf{n}_2 \mathbf{v}_{02} = 0; \tag{24}$$

$$m_{x2} = -\frac{2r_2}{z_{(02)}} \frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{e}_{t2}}{\mathbf{n}_2 \mathbf{k}_{02}}; \tag{25}$$

$$\tan \alpha_{x02} = -\frac{2r_2}{z_{(02)} r'_{02}} \frac{[\mathbf{n}_2 \mathbf{e}_{t2} \mathbf{k}_{02}]}{\mathbf{n}_2 \mathbf{k}_{02}}, \tag{26}$$

где  $\mathbf{n}_2$  – нормаль к отсчетной поверхности;  $\mathbf{v}_{02}$  – вектор относительной скорости в станочном зацеплении колеса;  $\mathbf{e}_{t2}$ ,  $\mathbf{k}_{02}$  – орты окружного направления колеса и оси производящего червяка соответственно;  $r_{02}$ ,  $z_{(02)}$ ,  $\alpha_{x02}$  – расчетный радиус, число заходов и осевой угол профиля производящего червяка соответственно. В развернутом виде уравнения (24)–(26) и алгоритм их решения даны в Trubachev E.S. (2020) On possibility of cutting bevel gearwheels by hobs. Таким образом обеспечивается касание поверхностей звеньев в расчетной точке при вращении с заданным передаточным отношением. Так же, как и при нарезании шестерни, подача инструмента может выполняться с постоянным или переменным отношением к дополнительному повороту колеса, реализуя производящие червяки постоянного или переменного шага.

9.2. Оценка локализованного контакта в передаче

Типовые оценки локализованного контакта:

- распределение модификаций  $\delta_\theta$  или  $\delta_n$  – расстояний между модифицированной и отсчетной поверхностями в окружном или нормальном направлении соответственно по поверхности зуба (поле приведенных зазоров, поле модификаций, в иностранной литературе ease-off);
- местная кинематическая погрешность, возникающая из-за модификаций.

Для расчета модифицированной поверхности можно использовать методику, аналогичную изложенной в п. 6.2 для шестерни, применяя найденные параметры наладки, и найти регулярную сетку (набор, массив) точек  $h_{2j}$ ,  $l_{2j}$ ,  $\theta_{2modij}$ . Тогда расчет модификаций предельно прост в окружном направлении:

$$\delta_{0ij} = (\theta_{2modij} - \theta_{2refij}) r_{2ij}. \tag{27}$$

В силу малости величин нормальная модификация может быть найдена проецированием окружной на направление нормали.

Само по себе визуальное представление модификаций (рис. 15) при относительно небольшом опыте

проектирования дает интуитивно понятную для пользователя качественную оценку верности выбранных параметров:

- модификации должны плавно увеличиваться от центра зуба к его кромкам;
- они не должны быть слишком большими, чтобы не вызвать большой концентрации напряжений и большой погрешности пересопряжения зубьев;
- желательнее избегать или ограничивать размеры дефектов зуба (подрезания, заострения, зоны с относительно большими модификациями).

Количественные оценки (рис. 14) можно разделить на две группы:

- а) расстояния  $\Delta_{i,e,h,f}$  от кромок зубьев до крайних точек зоны с модификациями, ограниченными заданной величиной (для примера 0,04 мм на рис. 14);
- б) величины продольного и профильного завала (модификации  $\delta_{i,e,h,f}$ ).

Следующие оценки связаны с активной действующей линией (в иностранной терминологии contact path) – это само расположение этой линии и погрешность геометрического пересопряжения зубьев. По сути в нескольких фиксированных положениях шестерни (при фиксированном  $\varphi_1$ ) следует решить так называемую обратную задачу теории зубчатых зацеплений – найти угловое положение колеса, при котором модифицированная боковая поверхность зубьев колеса вступит в контакт с поверхностью шестерни. Если контакт локализован по высоте и длине зуба, можно воспользоваться следующим упрощающим приемом. В каждой рассматриваемой фазе зацепления (углы поворота звеньев –  $\varphi_{1i}$  и  $\varphi_{2i} = \varphi_{1i}/i$ ) имеются найденные предварительно линии сопряженного контакта (см. п. 8.2). По сути это место на зубьях с наибольшим сближением сопряженных поверхностей. Модифицированная поверхность зуба колеса отстоит от сопряженной на величину модификации, т. е. в точках контактной линии в передаче образовались зазоры, которые выбираются дополнительным поворотом колеса  $\Delta\varphi_2$ . Вдоль контактной линии зазоры переменны, и в какой-то из точек зазор минимален. В силу малости зазоров-модификаций (как правило, они меньше высоты зуба на два и более порядка) с хорошим приближением можно считать, что при выборке зазора искомый контакт произойдет вблизи этой точки. Эту точку с достаточной для практического применения точностью можно считать точкой активной действующей линии, а зазор-модификация, оцененный в направлении поворота колеса, есть погрешность передачи в рассматриваемой фазе зацепления:  $\Delta\varphi_2 = \delta_0$ . Находя такие точки и соответствующие углы  $\Delta\varphi_2$  при разных  $\varphi_1$ , можно получить график погрешности  $\Delta\varphi_2(\varphi_1)$  (в иностранной литературе transmissionerror). Этот график для каждого зуба пересекается с аналогичными графиками для соседних зубьев – предыдущего и последующего. Точки пересечения этих графиков дают погрешность геометрического пересопряжения зубьев (рис. 15, 17). Пример расчета активной действующей линии и контактных линий показан на рисунке 15.

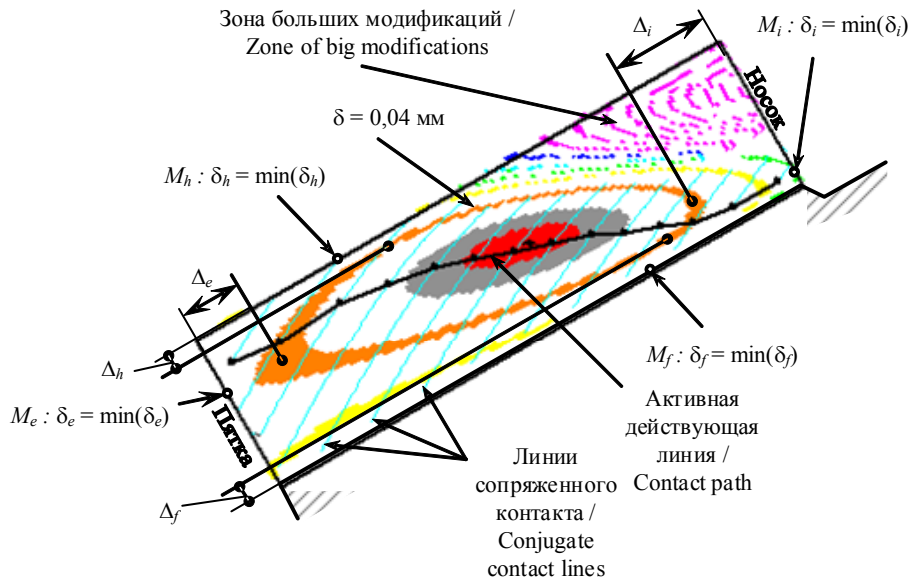


Рис. 15. Поле модификаций на осевой проекции зуба колеса и его оценки

Fig. 15. Ease-off on the axial projection of the gearwheel tooth and its values

По результатам оценки локализованного контакта корректируются параметры  $z_0$  и  $p_{\gamma 0}$  (или  $m_{x0}$ ), входящие в (24) и определяющие изменение шага производящих червяков шестерни и колеса и продольной модификации зубьев

**10. Некоторые свойства локализованного контакта**

Основные параметры передачи, взятой для примеров, перечислены в п. 6.

1. Активная действующая линия в предлагаемой передаче обычно имеет диагональное направление. Это направление можно несколько изменить в сторону более близкого к профилю или продольной ли-

нии зуба. С точки зрения получения более высокого коэффициента перекрытия и более плавной работы передачи и снижения чувствительности передачи к погрешности профиля инструмента продольное направление активной действующей линии предпочтительно [21]. Такому направлению обычно способствует увеличение угла наклона продольной линии зуба (обратим внимание: линии сопряженного контакта при этом эволюционируют от практически продольного направления по отношению к зубу до всё большего наклона) и меньший уровень продольной модификации. На рисунке 16 показаны различные варианты соотношений этих параметров.

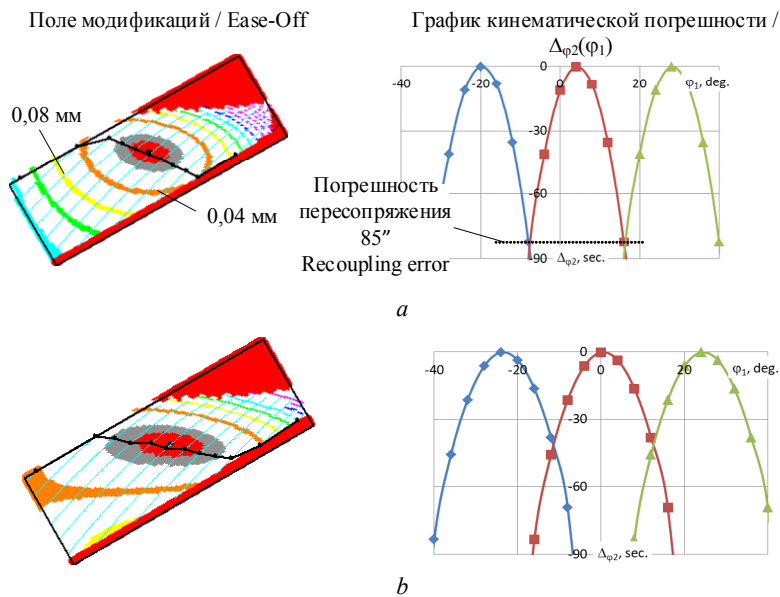


Рис. 16. Активная действующая линия и погрешность пересопряжения в зависимости от угла наклона линии зуба и продольной модификации:  $a - \beta = 30,1^\circ$ , большая продольная модификация зуба;  $b - \beta = 30,1^\circ$ , малая продольная модификация зуба

Fig. 16. Contact path and transmission error depending on the spiral angle and the longitudinal modification:  $a - \beta = 30,1^\circ$ , large tooth longitudinal modification;  $b - \beta = 30,1^\circ$ , small tooth longitudinal modification;

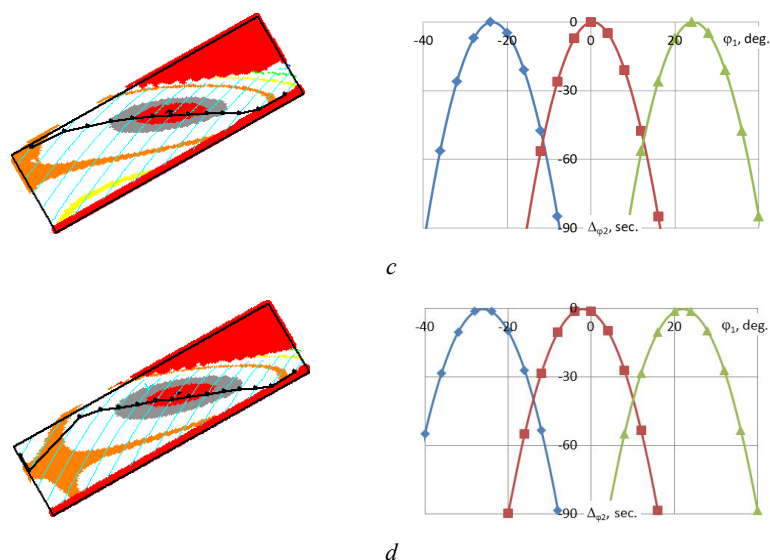


Рис. 16 (окончание): *c* –  $\beta = 40,2^\circ$ , малая продольная модификация;  $\beta = 49,5^\circ$ ; *d* – малая продольная модификация зуба  
 Fig. 16(continued): *c* -  $\beta = 40,2^\circ$ , small tooth longitudinal modification;  $\beta = 49,5^\circ$ ; *d* - small tooth longitudinal modification

2. Профильная локализация контакта обеспечивается автоматически из-за вогнутости осевых профилей производящих червяков, образуемых прямыми режущими кромками резцов обкаточных головок (червяки видов ZN1 по ГОСТ 18498–89 и SZN1 по ГОСТ 22850–77). При этом вогнутость профиля чер-

вяка и степень профильной модификации зуба тем больше, чем выше угол подъема винтовой линии червяка, что демонстрируется примером на рисунке 17 для передачи с углом  $\beta \approx 40^\circ$ . Таким образом, мы имеем эффективный инструмент управления профильной локализацией контакта при проектировании передачи.

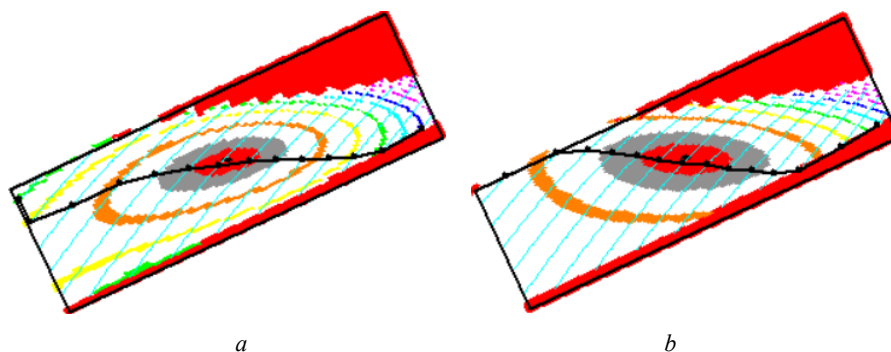


Рис. 17. Влияние углов  $\gamma_{01}$  и  $\gamma_{02}$  подъема винтовых линий производящих червяков шестерни и колеса на профильную локализацию контакта: *a* –  $\gamma_{01} = 14,40^\circ$ ;  $\gamma_{02} = 15,82^\circ$ ; *b* –  $\gamma_{01} = 7,12^\circ$ ;  $\gamma_{02} = 7,80^\circ$

Fig. 17. The influence of the helix angles  $\gamma_{01}$  and  $\gamma_{02}$  of generating worms on the profile contact localization: *a* -  $\gamma_{01} = 14,40^\circ$ ;  $\gamma_{02} = 15,82^\circ$ ; *b* -  $\gamma_{01} = 7,12^\circ$ ;  $\gamma_{02} = 7,80^\circ$

3. Продольная локализация контакта может быть получена при варьировании комбинации станочного межосевого угла и модуля производящего червяка. Каждый вариант комбинации при решении (24)–(26) дает меньший или больший (удобный для компоновки сборного инструмента) диаметр производящего червяка. Дополнительное управление продольной модификацией связано с варьированием коэффициента  $k_p$  в (24).

4. Схожие распределения модификаций могут быть обеспечены при разных комбинациях параметров, что дает хорошие возможности для тонкого управления локализацией контакта, унификации инструмента для нарезания разных передач и выбора подходящего по компоновке диаметра сборного инструмента. Рисунок 18 показывает эту возможность для рассматриваемого примера передачи.

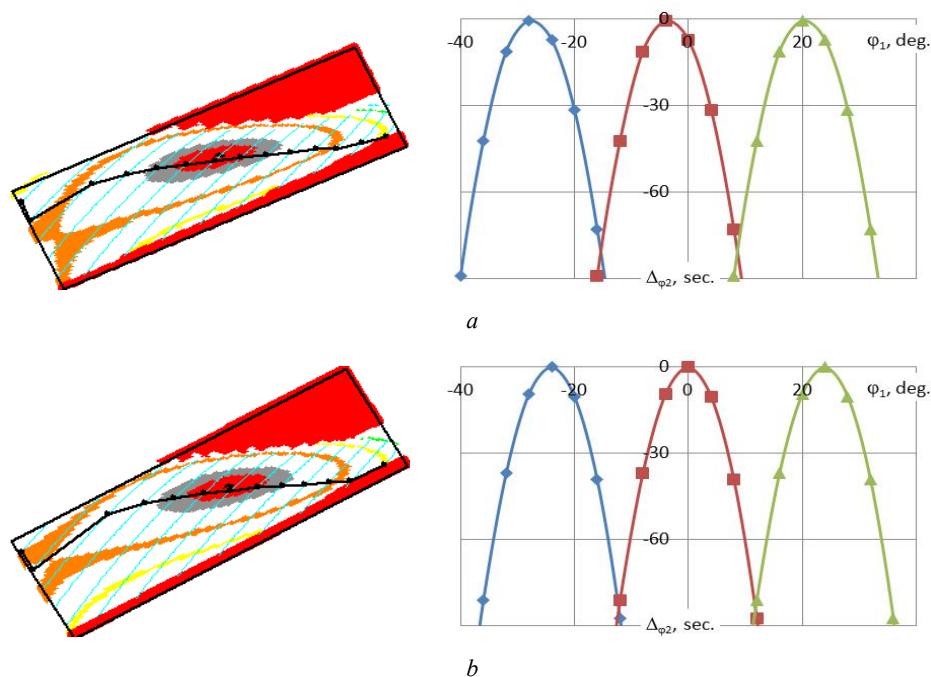


Рис. 18. Схожий локализованный контакт при разных производящих червяках:  
 $a - d_{a01} = d_{a02} = 52 \text{ мм}; z_{(01)} = 2; z_{(02)} = 4; b - d_{a01} = d_{a02} = 70 \text{ мм}; z_{(01)} = 4; z_{(02)} = 6$

Fig. 18. Similar localized contact in different generating worms:  
 $a - d_{a01} = d_{a02} = 52 \text{ мм}; z_{(01)} = 2; z_{(02)} = 4; b - d_{a01} = d_{a02} = 70 \text{ мм}; z_{(01)} = 4; z_{(02)} = 6$

## 11. Выводы

В статье автор попытался дать цельное представление о новой разновидности конической передачи, возможностях ее улучшения, процессе ее проектирования и основных идеях, положенных в основу этого процесса. Рассмотренный метод проектирования реализован в программном комплексе Bevel+ для расчета конических передач с прямыми и спиральными зубьями.

Стоит ожидать, что рассмотренная передача по своим основным эксплуатационным характеристикам окажется аналогичной традиционным решениям. Главной ее конструктивной особенностью может быть возможный большой угол наклона линии зуба, что обуславливает, с одной стороны, повышенные значения сил, действующих на звенья, с другой – повышенный коэффициент перекрытия и увеличенную изгибную прочность зубьев и передачи в целом, и улучшенную плавность работы. Главным же конкурентным преимуществом передачи является более простая технология производства, союзная с технологией производства передач червячного типа и относительно простая в отношении подготовки и реализации на распространенных зубофрезерных станках и обрабатывающих центрах. Это делает рассмотренную передачу альтернативой традиционным решениям, зависимым от зарубежных технологий.

Производство передачи подтвердило ожидаемую эффективность как с точки зрения качества, производительности и общих затрат на производство, так и с точки зрения универсализма и удобства управления геометрией зубьев.

## Библиографические ссылки

1. *Stadtfeld Hermann J.* (2014) *Bevel Gear Technology. The science of gear engineering and modern manufacturing methods for angular transmissions*, 2014, The Gleason Works, Rochester NY, USA.
2. *Klingelberg J.* (ed.), *Bevel Gear* (2016) Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016, ISBN 978-3-662-43892-3 ISBN 978-3-662-43893-0 (eBook). DOI: 10.1007/978-3-662-43893-0
3. *Trubachev E.S.* (2020) On possibility of cutting bevel gearwheels by hobs. *New approaches to gear design and production*. Springer International Publishing AG Switzerland, vol. 81, pp. 273–294.
4. *Trubachev E.S.* (2020) New possibilities of tooth cutting by running cutter heads. *New approaches to gear design and production*. Springer International Publishing AG Switzerland, vol. 81, pp. 295–310.
5. *Trubachev E.S., Bogdanov K.V., Pushkareva T.A.* (2022) Advanced method of cutting spiroid, worm and bevel gearwheel teeth by running-in cutter heads. *Forsch Ingenieurwes*, 86, pp. 709–719.
6. *Штадтфельд Х.* (2023) Обзор трансмиссий электромобилей: новые решения для трансмиссий электрических и гибридных транспортных средств / пер. В. И. Прилепского. Саратов : Новый ветер, 2023. 239 с. [Stadtfeld H. eDrive transmission guide. Gleason Works. Rochester, USA, 2020. ISBN 978-5-98116-280-0
7. *Gosselin C., Trubachev E., Barmina N.* (eds.) (2020) Advanced computer-aided gear design, analysis and manufacturing. In: *New approaches to gear design and production. Mechanisms and Machine Science*, vol. 81. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-34945-5\_3
8. *Шевелева Г. И., Волков А. Э., Медведев В. И.* Программный комплекс для подготовки производства спирально-конических зубчатых передач // Вестник машиностроения. 2005. № 9. С. 6–14.

9. Волков А. Э., Лагутин С. А., Медведев В. И. Особенности применения ПК «Эксперт» в производстве конических зубчатых передач для тяжелого машиностроения // Теория и практика зубчатых передач. Ижевск, 2004. С. 278–282.

10. Гольдфарб В. И. Аспекты проблемы автоматизации проектирования передач и редукторов // Передачи и трансмиссии : Научный журнал Технического комитета по зубчатым передачам IFToMM. 1991. № 1. С. 20–24.

11. Сегаль М. Г. Об определении границ пятна контакта зубьев конических и гипоидных передач // Машиноведение. 1972. № 4.

12. Гольдфарб В. И., Несмелов И. П. Выбор схем неортогональной зубчатой передачи с перекрещивающимися осями // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1982. № 10. С. 31–35.

13. Георгиев А. К. Элементы геометрической теории спироидных передач // Известия вузов. Машиностроение. 1963. № 8. С. 37–45.

14. Litvin F.L., Fuentes A. (2004) Gear Geometry and Applied Theory. 2nd ed. Cambridge University Press [Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М. : Наука, 1968. 584 с.].

15. Fan Q. (2016). Ease-Off and Application in Tooth Contact Analysis for Face-Milled and Face-Hobbed Spiral Bevel and Hypoid Gears. In: Goldfarb V., Barmina N. (eds.) Theory and Practice of Gearing and Transmissions. Mechanisms and Machine Science, vol 34. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-19740-1\_15

16. Трубачев Е. С. Синтез сопряженного спироидного зацепления по условиям исключения подрезания // Вестник машиностроения. 2004. № 9. С. 7–11.

17. Бабичев Д. Т. Перспективы использования системы обновленных геометрических примитивов при исследовании реальных зацеплений // Теория и практика зубчатых передач : труды международной конференции. Ижевск, 1998. С. 531–536.

18. Георгиев А. К., Голубков Н. С. К определению действующих в зацеплении сил и КПД в наиболее общем случае спироидной передачи // Механические передачи : сб. трудов. Ижевск, 1972. С. 25–30.

19. Рациональный выбор параметров зацепления червячных цилиндрических передач / И. П. Бернацкий, Н. И. Вьюшкин, Б. К. Герасимов, В. Н. Комков // Зубчатые и червячные передачи. Л. : Машиностроение, 1974. С. 193–210.

20. Шевелева Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел. М. : Станкин, 1999. 494 с.

21. Litvin Faydor, Sheveleva, Galina, Vecchiato Daniele, Gonzalez-Perez Ignacio, Fuentes Aznar Alfonso (2005) Modified approach for tooth contact analysis of gear drives and automatic determination of guess values. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, pp. 2927-2946. DOI: 10.1016/j.cma.2004.07.031

## References

1. Stadtfeld Hermann J. (2014) Bevel Gear Technology. The science of gear engineering and modern manufacturing methods for angular transmissions, 2014, The Gleason Works, Rochester NY, USA.

2. Klingelnberg J. (ed.), Bevel Gear (2016) Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016, ISBN 978-3-662-43892-3 ISBN 978-3-662-43893-0 (eBook). DOI: 10.1007/978-3-662-43893-0

3. Trubachev E.S. (2020) On possibility of cutting bevel gearwheels by hobs. *New approaches to gear design and production*. Springer International Publishing AG Switzerland, vol. 81, pp. 273-294.

4. Trubachev E.S. (2020) New possibilities of tooth cutting by running cutter heads. *New approaches to gear design and production*. Springer International Publishing AG Switzerland, vol. 81, pp. 295-310.

5. Trubachev E.S., Bogdanov K.V., Pushkareva T.A. (2022) Advanced method of cutting spiroid, worm and bevel gearwheel teeth by running-in cutter heads. *Forsch Ingenieurwes*, 86, pp. 709-719.

6. Shtadtfeld Kh. (2023) *Obzor transmissij elektromobilej: novye resheniya dlya transmissij elektricheskikh i gibridnykh transportnykh sredstv* [Electric Vehicle Transmission Review: New Solutions for Electric and Hybrid Vehicle Transmissions] / trans. by V. I. Prilepsky. Saratov: Novy Veter Publishing, 2023, 239 p. (in Russ.) [Stadtfeld H. eDrive transmission guide. Gleason Works. Rochester, USA, 2020. ISBN 978-5-98116-280-0].

7. Gosselin C., Trubachev E., Barmina N. (eds.) (2020) Advanced computer-aided gear design, analysis and manufacturing. *New approaches to gear design and production. Mechanisms and Machine Science*, vol. 81. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-34945-5\_3

8. Sheveleva G.I., Volkov A.E., Medvedev V.I. (2005) [Software package for the preparation of production of spiral bevel gears]. *Vestnik Mashinostroeniya*, no. 9, pp. 6-14 (in Russ.).

9. Volkov A.E., Lagutin S.A., Medvedev V.I. (2004) [Features of the application of the Expert PC in the production of bevel gears for heavy engineering]. *Teoriya i praktika zubchatykh peredach*, pp. 278-282 (in Russ.).

10. Goldfarb V.I. (1991) [Aspects of the problem of automation of design of gears and reducers]. *Gears and transmissions: Scientific journal of the Technical Committee on gear transmissions IFToMM*, no. 1, pp. 20-24 (in Russ.).

11. Segal M.G. (1972) [On the determination of the boundaries of the contact patch of teeth of bevel and hypoid gears]. *Mashinovedenie*, no. 4 (in Russ.).

12. Goldfarb V.I., Nesmelov I.P. (1982) [Selection of non-orthogonal gear transmission schemes with intersecting axes]. *Izvestiya visshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*, no. 10, pp. 31-35 (in Russ.).

13. Georgiev A.K. (1963) [Elements of the geometric theory of spiroid gears]. *Mashinostroenie*, no. 8, pp. 37-45 (in Russ.).

14. Litvin F.L., Fuentes A. (2004) Gear Geometry and Applied Theory. 2nd ed. Cambridge University Press [Litvin F.L. Theory of tooth engagement. Moscow: Nauka Publishing, 1968, 584 p. (in Russ.)].

15. Fan Q. (2016). Ease-Off and Application in Tooth Contact Analysis for Face-Milled and Face-Hobbed Spiral Bevel and Hypoid Gears. In: Goldfarb V., Barmina N. (eds.) Theory and Practice of Gearing and Transmissions. Mechanisms and Machine Science, vol. 34. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-19740-1\_15

16. Trubachev Ye.S. (2004) [Synthesis of conjugate spiroid linkage under conditions of undercut elimination]. *Vestnik Mashinostroeniya*, no. 9, pp. 7-11 (in Russ.).

17. Babichev D.T. (1998) [Prospects for using updated geometric primitives in the study of real-gearing]. In: *Theory and practice of gear transmissions: Proceedings of the International Conference*. Izhevsk, pp. 531-536 (in Russ.).

18. Georgiev A.K., Golubkov N.S. (1972) [To determine the operating factors in engagement or efficiency in the most general case of spiroid transmission]. *Mekhanicheskie Peredachi*, pp. 25-30 (in Russ.).

19. Bernatskii I.P., Vyushkin N.I., Gerasimov B.K., Komkov V.N. (1974) [Rational selection of parameters for engagement of worm gears]. In: *Zubchatie i Chervyachnie Peredachi*. Leningrad: Mashinostroenie Publishibg, pp. 193-210 (in Russ.).

20. Sheveleva G.I. (1999) [Theory of shape formation and contact of moving bodies]. Moscow: Stankin, 1999, 494 p. (in Russ.).

21. Litvin Faydor, Sheveleva, Galina, Vecchiato Daniele, Gonzalez-Perez Ignacio, Fuentes Aznar Alfonso (2005) Modi-

fied approach for tooth contact analysis of gear drives and automatic determination of guess values. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 2927-2946. DOI: 10.1016/j.cma.2004.07.031

### A New Type of Bevel Gear with Spiral Teeth

*E.S. Trubachev*, DSc in Engineering, Professor, Institute of Mechanics named after Professor V.I. Goldfarb, Kalashnikov IzhSTU, Izhevsk, Russia

*A new type of bevel gearing with spiral teeth formed by means of two alternate generating worms is presented. The toothing method by means of generating cutter head and the general sequence of gearing design are described. The stages of gearing design are considered – the choice of diagram parameters, the choice of generating parameters and the calculation of gear tooth geometry, calculation of virtual conjugate meshing, and synthesis of localized contact. Methods for selection the machine-tool meshing parameters for pinion and gear and a method for calculating the active acting line are proposed. The main properties of the gearing are determined, as well as the operational and production advantages of the new type of the gearing - the possibility of providing a higher overlap coefficient and smooth operation, the possibility of effective methods for contact localization control and the availability of tooth machining technology.*

**Keywords:** bevel gearing, spiral teeth, gearing design, localized contact.

Получено 09.11.2025

#### Образец цитирования

*Трубачев Е. С.* Новая разновидность конической передачи со спиральными зубьями // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2026. Т. 29, № 1. С. 12–26. DOI: 10.22213/2413-1172-2026-1-12-26

#### For Citation

Trubachev E.S. (2026) [A New Type of Bevel Gear with Spiral Teeth]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, vol. 29, no. 1, pp. 12-26. DOI: 10.22213/2413-1172-2026-1-12-26 (in Russ.).